



المدرسة الوطنية للمهندسين بتونس  
école nationale d'ingénieurs de Tunis

## EXERCICES DE MESURES ET INSTRUMENTAION AVEC QUELQUES CORRIGES

1<sup>ère</sup> ANNEE TOUTE OPTION

A l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis  
Université de Tunis El Manar



Karim Bourouni  
Maître Assistant en Génie Industriel  
Janvier 2011

# Sommaire

	Analyse dimensionnelle	Calcul d'incertitudes	Analyse statistiques simples	Regression lineaire ou methode des moindres carrees	Caracteristiques de capteurs	Thermometres a mercure	PT100 (RTD)	Bilame metallique	Thermistance	Pyrometre optique	Thermocouple	Correction	Version anglaise	Ref.: C. Bouden	Ref.: H. Bouzouita	Page de l'exercice	Page de la version anglaise	Page de la correction	Niveau de difficulte
<b>Chapitre 1: Analyse dimensionnelle</b>																			
Ex1	<input checked="" type="checkbox"/>															4			
Ex2	<input checked="" type="checkbox"/>															5			
Ex3	<input checked="" type="checkbox"/>															8			
Ex4	<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>				8		126	
<b>Chapitre 2 : Calcul d'incertitude</b>																			
Ex 1		<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		9	83		
Ex 2		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>				9		127	
Ex 3		<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		9	83		
Ex 4		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			9	83	128	
Ex 5		<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		10	83		
Ex 6		<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		10	84		
Ex 7		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			10	84	128	
Ex 8		<input checked="" type="checkbox"/>														11			
Ex 9		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>				11		129	
Ex 10		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>				12		130	
Ex 11		<input checked="" type="checkbox"/>														12			
Ex 12		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>				12		131	
Ex 13		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>				13		131	
Ex 14		<input checked="" type="checkbox"/>												<input checked="" type="checkbox"/>		13			
Ex 15		<input checked="" type="checkbox"/>												<input checked="" type="checkbox"/>		13			
Ex 16		<input checked="" type="checkbox"/>														14			
Ex 17		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>		14		132	
Ex 18		<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>			15	85		
Ex 19		<input checked="" type="checkbox"/>												<input checked="" type="checkbox"/>		16			
Ex 20		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			16	85	134	
Ex 21		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			17	86	134	
Ex 22		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			17	86		
Ex 23		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		17	86	135	
Ex 24		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>				18		136	
Ex 25		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			18	87	136	
Ex 26		<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>				19		137	
<b>Chapitre 3: Traitement statistique</b>																			
Ex 1			<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		20	88		
Ex 2			<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>				21		139	
Ex 3			<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		21	89		
Ex 4			<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		21	89		
Ex 5			<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		22	90		
Ex 6			<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		22	90		
Ex 7			<input checked="" type="checkbox"/>													23			
Ex 8			<input checked="" type="checkbox"/>													23			
Ex 9			<input checked="" type="checkbox"/>													23			
Ex 10			<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>				24		140	
Ex 11			<input checked="" type="checkbox"/>													25			
Ex 12			<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>		25			
Ex 13			<input checked="" type="checkbox"/>													26			

	Analyse dimensionnelle	Calcul d'incertitudes	Analyse statistiques simples	Regression lineaire ou methode des moindres carrees	Caracteristiques de capteurs	Thermometres a mercure	PT100 (RTD)	Bilame metallique	Thermistance	Pyrometre optique	Thermocouple	Correction	Version anglaise	Ref.: C. Bouden	Ref.: H. Bouzouita	Page de l'exercice	Page de la version anglaise	Page de la correction	Niveau de difficulte
<b>Chapitre 3: Traitement statistique</b>																			
Ex 14			<input checked="" type="checkbox"/>														27		
Ex 15			<input checked="" type="checkbox"/>														27		
Ex 16			<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>			28		
Ex 17			<input checked="" type="checkbox"/>														29		
Ex 18				<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>			30		
Ex 19				<input checked="" type="checkbox"/>										<input checked="" type="checkbox"/>			30		
Ex 20				<input checked="" type="checkbox"/>													30		
Ex 21				<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>			31	142	
Ex 22				<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					32	144	
Ex 23				<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>						<input checked="" type="checkbox"/>				33	90	
Ex 24				<input checked="" type="checkbox"/>					<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			33	91	145
Ex 25				<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>				34	91	
Ex 26				<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>					34	146	
Ex 27				<input checked="" type="checkbox"/>													35		
<b>Chapitre 4: Caracteristiques des capteurs</b>																			
Ex 1		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>				37	92	
Ex 2				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>				37	92	
Ex 3		<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>				38	93	148
Ex 4		<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>												38		
Ex 5		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>			38		
Ex 6					<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			39	93	
Ex 7		<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			40	93	
Ex 8					<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>			40		
Ex 9					<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>					41		
Ex 10					<input checked="" type="checkbox"/>												42		
Ex 11		<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>						<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>				42	94	
Ex 12		<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>												42		
Ex 13					<input checked="" type="checkbox"/>												43		
Ex 14					<input checked="" type="checkbox"/>												44		
Ex 15					<input checked="" type="checkbox"/>												44		
<b>Chapitre 5 : Mesure de temperature</b>																			
Ex 1								<input checked="" type="checkbox"/>					<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			47	95	
Ex 2								<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>				47	95	149
Ex 3								<input checked="" type="checkbox"/>									49		
Ex 4							<input checked="" type="checkbox"/>						<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			50	97	
Ex 5							<input checked="" type="checkbox"/>						<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			50	97	
Ex 6							<input checked="" type="checkbox"/>					<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>				50	151	
Ex 7									<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			52	97	
Ex 8									<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			52	97	
Ex 9							<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>					<input checked="" type="checkbox"/>			52		
Ex 10					<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		52	98	152
Ex 11											<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			53	98	
Ex 12		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			53	98	
Ex 13											<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			54	99	152
Ex 14											<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>				54	100	155

	Analyse dimensionnelle	Calcul d'incertitudes	Analyse statistiques simples	Regression lineaire ou methode des moindres carrees	Caracteristiques de capteurs	Thermometres a mercure	PT100 (RTD)	Bilame metallique	Thermistance	Pyrometre optique	Thermocouple	Correction	Version anglaise	Ref.: C. Bouden	Ref. : H. Bouzouita	Page de l'exercice	Page de la version anglaise	Page de la correction	Niveau de difficulte
<b>Chapitre 5 : Mesure de temperature</b>																			
Ex 15						<input checked="" type="checkbox"/>					<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>			55	100		
Ex 16				<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>		55			
Ex 17		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>		56			
Ex 18										<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		56	101		
<b>Chapitre 6 : Questions de cours</b>																			
Ex 1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		58	103	156	
Ex 2					<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		58	103	156	
Ex 3					<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>		58	103		
Ex 4		<input checked="" type="checkbox"/>											<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		58	104	157	
Ex 5			<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		59	104	158	
Ex 6					<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>		59	104		
Ex 7					<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>			59	104		
<b>Chapitre 7: Problemes de synthese</b>																			
P.1		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>											60			
P.2					<input checked="" type="checkbox"/>									<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	62	105		
P.3					<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	64	107	159	
P.4		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>					<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			65	108	160	
P.5				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>			67	110		
P.6		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			69	112	163	
P.7					<input checked="" type="checkbox"/>								<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	71	114		
P.8		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			73	116	165	
P.9		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			74	117	168	
P.10		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			76	119	170	
P.11		<input checked="" type="checkbox"/>		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>							<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			78	122	172	

## **PREFACE**

Ce livre est destiné aux étudiants de première année de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis de toutes spécialités.

Suite à mes années passées à l'ENIT en enseignant le cours de Mesures et Instrumentation, j'ai remarqué que mes élèves manquaient d'outils pour mettre en pratique les connaissances acquises durant le cours.

Avec une charge horaire de 15h par an, il est impossible aux enseignants de finir le programme en incluant des séances de travaux dirigés dignes de se nom. En plus, je n'ai pas pu trouver un livre d'exercices répondant aux besoins de nos étudiants et portant sur le programme enseigné à l'ENIT.

Cette première version de ce livre est une tentative de ma part afin de venir en aide à nos étudiants afin qu'ils puissent s'exercer et mettre en pratique les connaissances acquises.

En attendant la deuxième version, qui comportera les corrections de tous les exercices, je propose dans cette première version quelques corrections afin d'aider l'étudiant dans son travail. Aussi, comme certain enseignants, dont je fais parti, assurent ce cours en anglais, je propose à la fin de ce livre quelques exercices en version anglaise.

Afin de faciliter l'utilisation de ce livre l'utilisateur pourra trouver dans les pages suivantes un mode d'emploi expliquant comment l'utiliser.

J'ai essayé de regrouper les exercices proposés par chapitre, toutefois certains exercices portent sur plusieurs parties du cours.

Ce livre est reparti en sept chapitres. Le premier chapitre porte sur l'analyse dimensionnelle. Dans le deuxième, le lecteur trouvera des exercices sur le calcul d'incertitudes. L'analyse statistique des données est le sujet du troisième chapitre. En ce qui concerne le quatrième chapitre, il porte sur les caractéristiques des instruments de mesure. Dans le cours de mesure et instrumentation enseigné à l'ENIT une attention particulière est portée à la mesure de la température. Pour cette raison, un long chapitre 5 lui a été consacré. J'ai essayé également de mettre ces exercices par type d'instrument (bilame métallique, PT100, Thermistance, etc.). Afin de réviser son cours et tester ses connaissances, l'étudiant peut trouver dans le chapitre 6 quelques exercices de connaissances générales.

Enfin, j'ai mis dans le dernier chapitre des problèmes de révision, permettant à l'élève de se préparer pour les examens.

Une partie de ces exercices a été prise des examens proposés à l'ENIT depuis 1999. Certains ont été proposés par mes collègues, en particulier M. Chiheb Bouden. A chaque fois qu'un exercice est pris d'un examen ou d'un travail

quelconque de mes collègues je leur fait référence dans la partie sommaire présenté au début de ce livre.

Pour finir, je vous souhaite un bon travail, et afin d'apporter des améliorations a cette première version je vous demande de m'envoyer vos commentaires, suggestions, remarques, critiques, corrections, etc. sur mon email :

[Karim.bourouni@enit.rnu.tn](mailto:Karim.bourouni@enit.rnu.tn) ou [karimbourouni@yahoo.fr](mailto:karimbourouni@yahoo.fr).

## MODE D'EMPLOI

Tous les exercices sont proposés dans ce livre en français. En plus, certains d'entre eux sont proposés en anglais. Ces exercices sont précédés du symbole ✠. La page de la version anglaise est indiquée dans le sommaire.

Les exercices pour les quels une correction est proposée dans ce livre sont indiqués avec le symbole ☺. La page de la correction est indiquée dans le sommaire.

# 1 ● ANALYSE DIMENSIONNELLE

## ▪ EXERCICE 1

Compléter le tableau suivant des dimensions et des unités dans le système international relatif aux principales grandeurs :

### ▪ Grandeurs Mécaniques :

Tableau 1.1. Dimensions des grandeurs mécaniques

Grandeur	Symbole utilisé	Dimension	Unités	Unités SI
Vecteur position	$\vec{r}$		m (mètre)	
Vitesse			m s <sup>-1</sup>	
Vitesse angulaire	$\vec{\omega}$		rad s <sup>-1</sup>	
Accélération	$\vec{a}$		m s <sup>-2</sup> ou Nkg <sup>-1</sup>	
Accélération de la pesanteur	$\vec{g}$		m s <sup>-2</sup> ou Nkg <sup>-1</sup>	
Force	$\vec{F}$		N (Newton)	
Travail	W		J (Joule)	
Energie Cinétique	E <sub>c</sub>		J	
Energie potentielle	E <sub>p</sub>		J	
Energie électrostatique	E <sub>s</sub>		J	
Energie magnétique	E <sub>m</sub>		J	
Puissance	P		W (Watt)	
Pression	P		Nm <sup>-2</sup> ou Pascal	
Quantité de mouvement	$\vec{p}$		kg m s <sup>-1</sup>	
Superficie	S		m <sup>2</sup>	
Volume	V		m <sup>3</sup>	
Temps, durée	t		s	
Masse	m		kg (kilogramme)	
Masse volumique	$\rho$		kg m <sup>-3</sup>	
Moment de force	$\vec{M}$		N.m	
Moment cinétique	$\vec{\sigma}$		kg m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	
Fréquence	v		Hz (hertz)	
Longueur d'onde	$\lambda$		m, A	
Période	T		s	
Pulsation	$\omega$		rad s <sup>-1</sup>	
Angle plan	$\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi$		rad	

Angle solide	$\Omega$		sr (stéradian)	
--------------	----------	--	----------------	--

▪ **Grandeurs Electromagnétiques :**

*Tableau 1.2. Dimensions des grandeurs électromécaniques*

Intensité de courant	$I$		A (Ampère)	
Charge électrique	$q, Q$		C (Coulomb)	
Moment dipolaire	$\vec{p}$		C.m (Coulomb x metre)	
Champ électrique	$\vec{E}$		$Vm^{-1}$ (Volt/m)	
Potentiel électrique	V		V (Volt)	
Densité linéaire de charge	$\lambda$		$cm^{-1}$	
Densité superficielle de charge	$\sigma$		$cm^{-2}$	
Densité volumique de charge	$\rho$		$cm^{-3}$	
Flux de champ A	$\Phi$			
Capacité d'un condensateur	C		Farad	
Densité de courant électrique	$\vec{J}$		$A m^{-2}$	
Conductivité électrique	$\gamma$		$S m^{-1}$	
Résistance	R		$\Omega$ (ohm)	
Force électromotrice	$E, e$		V (Volt)	
Champ magnétique	$\vec{B}$		T (Tesla) $Wb/m^2$	
Potentiel vecteur	$\vec{A}$		Wb/m	
Coefficient de self inductance	L		H (henry)	
Coefficient de mutuelle inductance	M		H (henry)	
Moment magnétique	$\vec{m}$		$A m^2$	
Permittivité électrique	$\epsilon$		F/m	
Permittivité magnétique	$\mu_0$		H/m	

▪ **EXERCICE 2**

1. Donner la définition d'une grandeur physique et sa propriété fondamentale
2. Une masse est mesurée à l'aide de deux unités  $U_1$  et  $U_2$ . Le rapport de ces deux unités est  $R = \frac{U_2}{U_1}$

$$R = \frac{U_2}{U_1}$$

2.1. Quelle est la valeur du rapport des deux résultats de mesure ?

2.2. La livre anglaise ou pound ( $U_2$ ) vaut 0.453492 kg. En prenant le kilogramme pour ( $U_1$ ), quelle est la masse en kg de 0.275 pound ?

3. Le psi est l'unité de mesure anglo-saxonne "pound per square inch" de la pression. On donne les équations aux unités :

$$\{1\} [\text{inch}] = \{2.54 \cdot 10^{-2}\} [\text{mètre}]$$

$$\{1\} [\text{pound}] = \{4448222\} [\text{Newton}]$$

Que vaut le psi dans le système international ? On rappelle que l'unité SI de pression est le Pascal et représente la pression exercée par une force de 1 Newton sur la surface de 1 mètre carré.

4. Etablir l'équation aux dimensions et donner la valeur numérique dans le système SI de la constante de Boltzmann :  $k = \frac{R}{N_A}$

On rappelle que le système SI Comprend 7 unités : Longueur (L), Masse (M), temps (T), courant électrique (I), température (K), quantité de matière (mol), et intensité lumineuse (Cd).

On donne  $R = 8.314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $N_A = 6.0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

5. L'indice de réfraction de l'air affecte les longueurs d'onde des radiations électromagnétiques par la relation :

$$n \times \lambda_{\text{air}} = \lambda_{\text{vide}} \quad (1.1)$$

Les formules d'Edlen permettent de calculer l'indice de réfraction de l'air La première formule d'indice de réfraction de l'air dans les conditions standards.

$$(n_s - 1) \times 10^8 = 8342,13 + \frac{2406030}{(130 - \sigma^2)} + \frac{15997}{(39,8 - \sigma^2)} \quad (1.2)$$

Où  $n_s$  est l'indice de réfraction dans des conditions d'air standards, c'est à dire pour une température  $T = 15^\circ\text{C}$  et une pression  $P = 101325 \text{ Pa}$  et  $\sigma = \frac{l}{\lambda}$  est le nombre d'onde (en  $\mu\text{m}^{-1}$ ) dans le vide la radiation considérée.

La deuxième formule donne l'indice de réfraction de l'air dans les conditions d'utilisation.

$$(n_{tp-1}) = (n_{tp} - 1) \times \left[ \frac{1,04126 \times 10^{-5} \times P}{1 + 0,003671 \times T} \right] \quad (1.3)$$

Où  $n_{tp}$  est l'indice de réfraction de l'air à la température  $T$  (en  $^\circ\text{C}$ ) et à la pression  $P$  (en Pa)

5.1. Quelle est la dimension de l'indice de réfraction  $n$  ?

5.2. Donner la dimension de l'unité des nombres figurant dans les expressions (1.2) et (1.3) : 8342,13; 13; 130; 15997; 0,003671;  $1.04126 \cdot 10^{-5}$

6. Dans les domaines de la géométrie, de la cinématique, de la dynamique et de l'électricité, le système SI utilise les quatre grandeurs physiques de base suivantes: Longueur, Masse, Temps et Intensité de courant électrique, dont les symboles sont notés L, M, T et I respectivement.

6.1. Compléter le tableau suivant des grandeurs physiques dérivées les plus courantes.

Tableau 1.3. Grandeurs physiques dérivées

Nom	Symbole	Equation de définition	Exposants dimensionnels
Vitesse	V	$V = L/T$	
Accélération	$\gamma$	$\gamma = V/T$	
Force	F	$F = M \gamma$	
Energie	W	$W = F L$	
Puissance	P	$P = W/T$	
Action	A	$A = W.T$	
Quantité d'électricité	Q	$Q = I.T$	
D.d.p	U	$U = P/I$	
Resistance	R	$R = U/I$	

6.2. On se propose de construire un système de grandeurs physiques couvrant le même domaine à partir des quatre grandeurs physiques de base suivantes : Longueur, Action, Temps et quantité d'électricité, dont les symboles seront notés L', A', T' et Q' respectivement.

a. Etablir un tableau équivalent à celui qui a été donné plus haut, comprenant dans l'ordre les grandeurs physique suivantes : vitesse v', accélération g', énergie w', puissance p', force f', masse m', intensité de courant électrique i', différence de potentielle u' et résistance r' (on donnera les exposants dimensionnels dans l'ordre suivant L', A', T' et Q')

b. Les unités de base du nouveau système sont déduites des unités SI par les relations suivantes :

1.  $[L'] = 2.42631 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

1.  $[A'] = 6.626176 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

1.  $[T'] = 8.093299 \cdot 10^{-21} \text{ s}$

1.  $[L'] = 1.602189 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

En déduire les valeurs numériques  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  définis ci-après :

1.  $[V'] = \alpha_1 \text{ m/s}$

1.  $[F'] = \alpha_2 \text{ N}$

1.  $[R'] = \alpha_3 \Omega$

$$1.[T'] = \alpha_4 A$$

▪ **EXERCICE 3**

1. A partir de l'équation de définition du champ électrique  $\vec{E}$  déterminer la dimension de la permittivité du vide  $\epsilon_0$  et déduire son unité dans SI
2. a. Déterminer la dimension du champ magnétique  $\vec{B}$  et déduire son unité dans SI  
b. Déduire la dimension de la permittivité du vide  $\mu_0$  ainsi que son unité dans le SI
3. Montrer que la célérité de la lumière dans le vide  $C$  vérifie l'équation suivante :

$$C^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \times \mu_0} \quad (1.4)$$

On donne :

$$\{\epsilon_0\} = 8.85 \cdot 10^{-12}$$

$$\{\mu_0\} = 12.56 \cdot 10^{-7}$$

▪ **EXERCICE 4 ☺**

La force qui s'exerce entre deux charges électriques  $q$  et  $q'$  séparées par une distance  $r$  est donnée en module par la loi de coulomb :

$$F = \frac{q \times q'}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r^2} \quad (1.5)$$

La force de la base entre deux fils parallèles parcourus respectivement par les courants  $I$  et  $I'$ , de longueur  $L$  et séparés par une distance  $r$  est donnée par :

$$F = \frac{\mu_0 \times I \times I' \times L}{2 \times \pi \times r} \quad (1.6)$$

1. Donner les dimensions de  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$
2. Vérifier l'homogénéité de la relation :  $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$  avec  $C$  étant la vitesse de la lumière dans le vide.

## 2 ● INCERTITUDES ET CALCUL D'ERREURS

---

### ✦ EXERCICE 1

Deux résistances ont des valeurs respectives  $10.7 \pm 2$  ohm et  $26.5 \pm 0.5$  ohm.

1. Quelle est la valeur de la résistance équivalente quand ils sont connectés (1) en séries, (2) en parallèle ?
2. Déduire l'erreur sur la résistance équivalente dans chaque cas.

### ▪ EXERCICE 2 ☺

Une résistance  $R = 5.1 \Omega$  est traversée pendant  $60.0$  s par un courant continu d'intensité  $2.2$  A. Quelle est l'énergie thermique dépensée dans cette résistance ? Donner son incertitude absolue. (Donner le résultat en deux chiffres significatifs)

Les incertitudes absolues des différents termes sont au plus égales à une unité de l'ordre du dernier chiffre.

### ✦ EXERCICE 3

Quand on mesure une constante de temps d'un circuit RC, nous supposons l'expression suivante :

$$A = \frac{V_c - V_s}{V_i - V_s} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.1)$$

Où :

$V_c$  : Tension aux bornes de la capacité

$V_s$  : Tension de saturation

$V_i$  : Tension initiale

$$V_s < V_c < V_i$$

Calculer l'incertitude  $\Delta A$  en fonction de l'incertitude sur la tension  $V_i$ ,  $V_c$  et  $V_s$  (Nous supposons que  $\Delta V_s = \Delta V_c = \Delta V_i = \Delta V$ )

### ✦ EXERCICE 4 ☺

Afin de calculer les pertes de chaleur à travers les murs d'un bâtiment, il est nécessaire de connaître la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur. Des températures de  $5^\circ\text{C}$  et  $20^\circ\text{C}$  sont mesurées de chaque côté du mur par un thermomètre à mercure avec un domaine de  $-25^\circ\text{C}$  à  $+25^\circ\text{C}$ . La précision des mesures est de  $\pm 1\%$  de la lecture, calculer l'erreur possible dans la figure calculée pour la différence de température.

✦ EXERCICE 5

La densité d'un liquide est calculée par la mesure de sa profondeur  $c$  dans un réservoir calibré de section rectangulaire et en le vidant dans un système de mesure de mass. La longueur et la largeur du réservoir sont respectivement  $a$  et  $b$ . Ainsi, la densité est donnée par :

$$d = \frac{m}{a \times b \times c} \quad (2.2)$$

Où  $m$  est la mass mesurée du liquide. Si les erreurs possibles des mesures sur  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $m$  sont respectivement: 1%, 1%, 2% et 0.5%, déterminer l'erreur possible sur la valeur calculée de la densité  $d$ .

✦ EXERCICE 6

Un générateur de courant continu de 3 V exigé pour un circuit est obtenu en connectant ensemble deux batteries de 1.5 Volts en série. Si l'erreur sur la tension à la sortie de chaque batterie est de  $\pm 1\%$ , calculer l'erreur possible sur la tension de sortie du générateur 3 V.

✦ EXERCICE 7 ☺

Pour mesurer l'indice  $n$  d'un matériau transparent pour une longueur d'onde  $\lambda$ , on peut utiliser un prisme d'angle  $A$  réalisé avec ce matériau et mesurer l'angle de déviation minimum  $D_m$  entre le rayon incident et le rayon émergent.

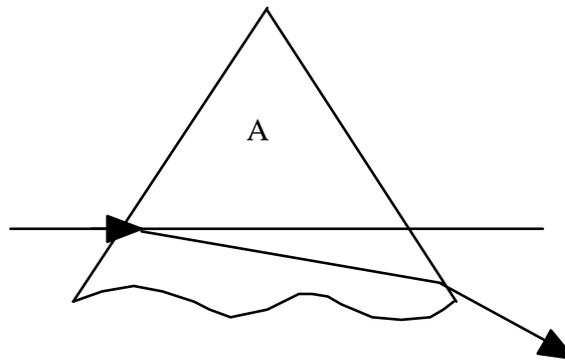


Figure 2.1. Diffraction par un prisme

On a alors la relation :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (2.3)$$

1. En appelant  $\Delta A$  et  $\Delta D_m$  les limites de l'erreur systématique sur  $A$  et  $D_m$ , calculer  $\Delta n$  limite supérieure de l'erreur systématique sur  $n$ .
2. Application numérique :  
 $A = 60'$ ;  $D_m = 40'$ ;  $\Delta A = 1'$ ;  $\Delta D_m = 2'$ .

▪ **EXERCICE 8**

Soit  $Y$  une grandeur physique calculée à partir des grandeurs physiques  $X_1$  et  $X_2$  par une relation de forme :  $Y = f(X_1, X_2)$

En outre  $X_1$  et  $X_2$  sont liées par la relation déterministe :  $X_2 = g(X_1)$

$X_1$  et  $X_2$  sont entachées d'erreurs systématiques évaluées par les incertitudes  $\Delta X_1$  et  $\Delta X_2$ .

Calculer l'incertitude  $\Delta Y$  qui en résulte sur  $Y$

- en faisant un calcul correct
- en faisant un calcul d'erreur qui "ignore" la relation entre  $X_1$  et  $X_2$

▪ **EXERCICE 9 ☺**

L'accélération  $g$  de la pesanteur mesurée avec une pendule réversible est donnée par la relation suivante :

$$g = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2} \quad (2.4)$$

Avec  $L = 104.23$  cm : la longueur du pendule et  $\Delta L = 0.1$  mm.

$T$  : est la période des oscillations

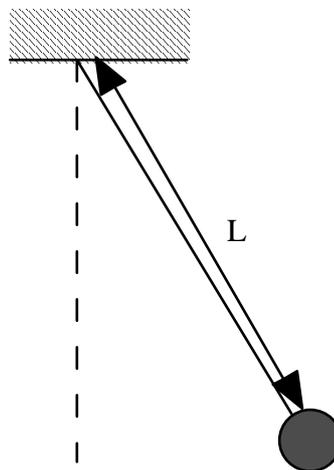


Figure 2.2. Schéma d'une pendule

1. Exprimer l'incertitude absolue sur  $g$  en fonction de  $\Delta L$ ,  $\Delta T$ ,  $L$  et  $T$ ;
2. On veut mesurer la période  $T$  avec un chronomètre, pour cela on compte  $N$  périodes pendant un temps  $t$   
 Calculer  $t$  pour que l'incertitude relative sur  $T$  soit égale à 1% sachant que les

incertitudes sur  $t$  sont dues à l'erreur d'enclenchement et à l'erreur de déclenchement du chronomètre sont de 0.1 s chacune.

4. Sachant que le nombre d'oscillations est de 22 oscillations pendant le temps  $t$ , déduire la période  $T$
5. Calculer  $g$  et  $\Delta g$

▪ **EXERCICE 10** ☺

La vitesse d'une masse suspendue par un fil à l'extrémité d'un pendule simple est donnée par la formule suivante :

$$V = \sqrt{g \times L \times (1 - \cos \theta)} \quad (2.5)$$

Avec

$g$  : l'accélération de la pesanteur

$L$  : la longueur du fil

$\theta$  : l'amplitude angulaire du pendule

1. En appelant  $\Delta g$ ,  $\Delta l$  et  $\Delta \theta$  les incertitudes sur  $g$ ,  $L$  et  $\theta$ . Calculer de deux manières différentes l'incertitude sur la vitesse  $V$ .

2. Application numérique :

$$g = 9.81 \text{ N/m} \quad \Delta g = 0.01 \text{ N/m}$$

$$L = 1,000 \text{ m} \quad \Delta L = 0.001 \text{ m}$$

$$\theta = 10^\circ \quad \Delta \theta = 1'$$

Calculer  $V$  et  $\Delta V$

▪ **EXERCICE 11**

Une résistance  $R = 5.1 \Omega$  est traversée pendant 60.0 s par un courant continu d'intensité 2.2 A.

Quelle est l'énergie thermique dépensée dans cette résistance? Donner son incertitude absolue. (Donner le résultat avec deux chiffres significatifs).

Les incertitudes absolues des différents termes sont au plus égales à une unité de l'ordre du dernier chiffre inscrit.

▪ **EXERCICE 12** ☺

La période d'un pendule simple pour des oscillations de faible amplitude est:

$$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1,000\text{m} \pm 0,001\text{m} \\ g = 9,8\text{N/kg} \pm 0.01\text{N/kg} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Calculer  $T$  et son incertitude absolue

▪ **EXERCICE 13** ☺

L'impédance d'une portion de circuit est

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad (2.7)$$

Chaque grandeur étant entachée d'incertitude, donner l'expression théorique de l'incertitude absolue sur  $Z$ .

▪ **EXERCICE 14**

Soit l'expression suivante :

$$d = \frac{m - m_1}{m - m_2} \quad (2.8)$$

Où  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  sont des masses

1. Etablir l'expression de l'incertitude relative sur  $d$   
Simplifier l'expression de l'incertitude relative, sachant que  $m > m_1 > m_2$  et que  $\Delta m = \Delta m_1 = \Delta m_2$ .
2. Calculer la valeur maximale de  $d$  à partir des valeurs numériques fournies ci-dessous. En déduire la valeur de  $\Delta d$ .  
 $m=138.2 \text{ g}$  ;  $m_1=47.8 \text{ g}$  ;  $m_2=41.6 \text{ g}$  ;  $\Delta m=0.1 \text{ g}$

▪ **EXERCICE 15**

Le circuit de la figure 2.3 ci-dessous est constitué d'un générateur, de f.e.m  $e$  et de résistance interne  $r$ , connecté à une résistance de charge  $R_c$ . Pour mesurer la tension  $v$  aux bornes de  $R_c$ , on utilise un voltmètre de résistance d'entrée  $R_e$ .

1. Faire un schéma montrant le branchement du voltmètre,
2. L'indicateur  $v'$  du voltmètre est-elle égale à la tension cherchée  $v$ ? Justifier,
3. Donner l'erreur systématique sur la mesure de la tension en fonction des caractéristiques du circuit.

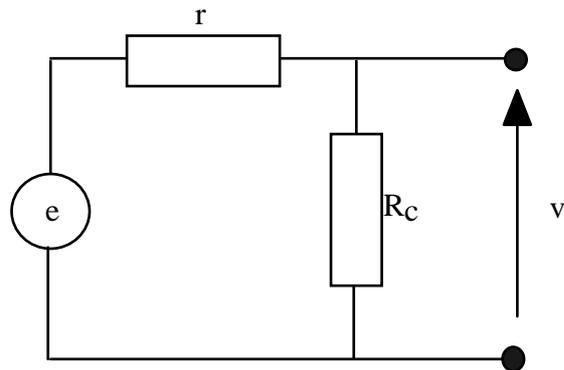


Figure 2.3. Mesure de tension dans un circuit

▪ **EXERCICE 16**

On considère la relation qui relie l'angle de perte  $\delta$  d'un condensateur, la capacité  $C$ , la résistance  $R$  et la fréquence  $f$  suivante :

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \pi R C f \quad (2.9)$$

1. Calculer l'incertitude absolue commise sur  $\operatorname{tg} \delta$ ; on donne  $R = 4500 \text{ K}\Omega$  à 1% prêt  
 $C = 3300 \text{ pF}$  à 0,5 % prêt, et  $f = 1000 \text{ Hz}$  à 2% prêt.
2. Exprimer correctement le résultat de mesure de  $\operatorname{tg} \delta$ .

On mesure la puissance réactive  $Q$  (en VAR) d'un récepteur de puissance active  $P = 15000\text{W}$  à 1% prêt, et de déphasage  $\varphi = 0,02$  radians à 2% prêt.

3. Calculer  $Q$  et présenter correctement le résultat de mesure.  
 On rappelle que  $Q = P \times \operatorname{Tg} \varphi$

▪ **EXERCICE 17 ☺**

On mesure la valeur d'une résistance électrique en utilisant un ampèremètre et un voltmètre.

Deux montages sont possibles :

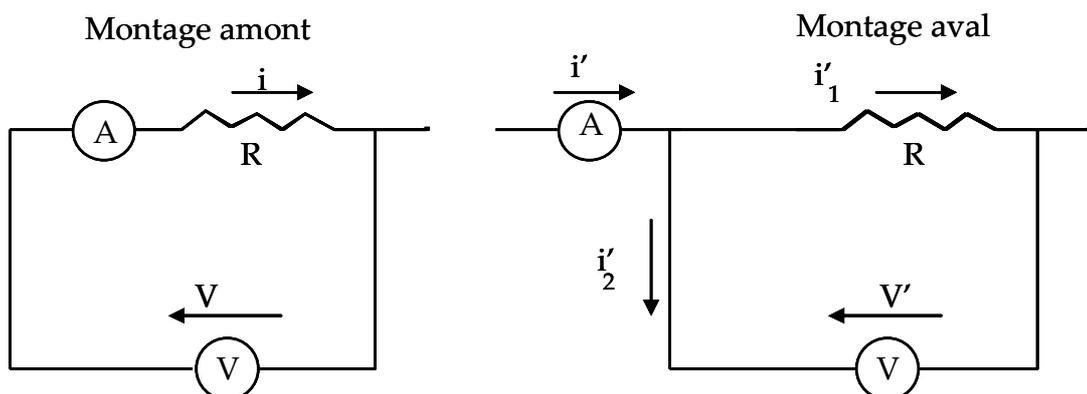


Figure 2.4. Montages pour la mesure d'une résistance

1. Lequel de ces deux montages donne-t-il la vraie valeur de la résistance R? Expliquer.
2. Calculer les corrections à apporter aux résultats  $v/i$  dans le montage amont et  $v'/i'$  dans le montage aval pour obtenir la valeur de résistance R.

On notera  $g$  la résistance interne de l'ampèremètre et  $R_v$  la résistance interne du voltmètre

Application numérique :

\* montage amont :  $v = 10 \text{ V}$ ,  $i = 10 \text{ mA}$ ,  $g = 124 \Omega$

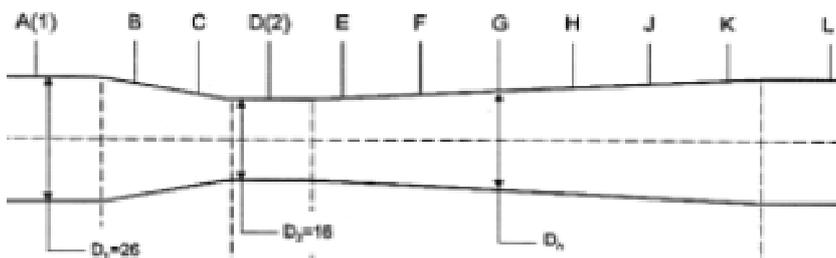
\* montage aval :  $v' = 8.72 \text{ V}$ ,  $i' = 10 \text{ mA}$ ,  $R_v = 200\,000 \Omega$ .

### ✦ EXERCICE 18

Un Venturi (Figure 2.5) est un système de mesure permettant la mesure du débit d'un liquide en convertissant une variation en pression à un débit massique en utilisant l'équation suivante :

$$q_m = K \times \frac{\pi}{4} \times d^2 \times \sqrt{\rho(P_1 - P_2)} \quad (2.10)$$

Où  $P_1$  et  $P_2$  sont les pressions en amont et en aval du Venturi et  $d$  le diamètre mesuré du tube.



loupe

Figure 2.5. Principe de fonctionnement d'un Venturi

1. Si  $K = 1.0$ ,  $P_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $P_2 = 0.999 \text{ bar}$ ,  $d = 20.0 \text{ cm}$  et  $\rho = 1.0 \text{ kg/l}$  calculer le débit

massique du liquide en (kg/s)

2. Si l'erreur possible sur chaque mesure de  $P_1$ ,  $P_2$  et  $d$  est de 1%, estimer l'erreur possible sur le débit massique calculé.

### EXERCICE 19

La mesure de la tension aux bornes d'un capteur résistif dans un montage potentiométrique se fait en se basant sur le montage suivant :

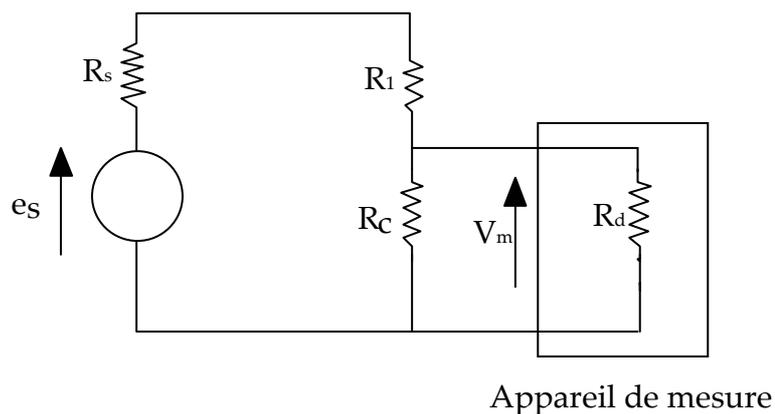


Figure 2.6. Montage potentiométrique

La tension est donnée par la relation suivante :

$$V_m = e_s \times \frac{R_c}{R_c + R_1 + R_s} \quad (2.11)$$

Si l'erreur sur les résistances est de 1% et l'erreur sur  $e_s$  est de 2%, calculer l'erreur relative sur  $V_m$  pour  $R_c = R_1 = R_s = 50 \Omega$ .

### EXERCICE 20 : EFFET HALL ☺

Lorsqu'un matériau, généralement semi-conducteur et sous forme de plaquette,

est parcouru par un courant  $I$  et soumis à une induction  $B$  faisant un angle  $\theta$  avec le courant  $I$ , une tension  $V_H$  perpendiculaire au courant et à l'induction apparaît.

Cette dernière est donnée par la relation suivante :

$$V_H = K_H \times I \times B \times \sin\theta \quad (2.12)$$

Où  $K_H$  est une constante.

Pour des valeurs de  $\theta$  proche de 0 ( $\text{tg}\theta \approx \theta$ ), les erreurs effectuées sont de 2% sur  $I$ , 1% sur  $B$  et 3% sur  $\theta$ .

Calculer l'erreur possible sur  $V_H$

### ✱ EXERCICE 21 : MESURE DE L'HUMIDITE DE L'AIR ☺

L'humidité absolue  $r$  de l'air correspond au rapport de la masse de la vapeur par la masse d'air sec, et s'exprime en g/Kg (gramme de vapeur par kilogramme d'air sec).

La plupart des instruments utilisés pour la mesure de l'humidité se basent sur la détermination de la pression partielle de la vapeur dans l'air  $P_v$  et de la pression totale du mélange  $P$ .

La relation entre ces deux pressions et l'humidité est donnée par la formule suivante :

$$P_v = \left( \frac{r}{0.622 + r} \right) \times P \quad (2.13)$$

1. Calculer la valeur de l'humidité de l'air lorsque  $P=1\text{bar}$  et  $P_v=0.1\text{bar}$
2. Déterminer l'erreur réalisée pour cette mesure si les erreurs sur la pression sont de 2%

### ✱ EXERCICE 22

Estimer l'erreur effectuée lors de la détermination du volume d'une sphère ayant un diamètre de 100 mm, si le diamètre est mesuré avec un écart type  $S_x = 0.05\text{mm}$

### ✱ EXERCICE 23 ☺

Le débit d'un liquide est calculé en permettant l'écoulement d'un liquide dans une cuve cylindrique (placée verticalement sur un plan) et mesurant la hauteur de la surface du liquide avant et après l'écoulement pour une durée de dix minutes. Le volume collecté au bout de 10 minutes est donné par:

$$\text{Volume} = (h_2 - h_1) \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad (2.14)$$

Où  $h_1$  et  $h_2$  sont les niveaux initial et final du liquide et  $d$  le diamètre du réservoir.

1. Si  $h_1 = 2$  m,  $h_2 = 3$  m et  $d = 2$  m calculer le débit du liquide en  $\text{m}^3/\text{s}$
2. Si l'erreur possible sur chaque mesure de  $h_1$ ,  $h_2$  et  $d$  est de  $\pm 1\%$ , estimer l'erreur possible sur la valeur calculée du débit liquide.

▪ **EXERCICE 24** ☺

On considère que l'eau entre dans un échangeur de chaleur de température  $T_e$  de  $(50.0 \pm 1.0)^\circ\text{C}$  et sort à la température  $T_s$  de  $(40.0 \pm 1.0)^\circ\text{C}$ . Si le débit massique  $\dot{m}$  de l'eau dans l'échangeur est de  $360$  kg/hr et l'erreur relative sur cette mesure est de  $1\%$  :

1. Quel serait le flux de chaleur transféré dans cet échangeur ?
2. Quelle serait l'incertitude sur ce flux ?

Le flux est donné par l'expression suivante :

$$Q = \dot{m} \times C_p \times (T_s - T_e) \quad (2.15)$$

On donne la chaleur massique du fluide qui circule dans l'échangeur :  
 $C_p = 4,18$  kJ/kg.K

✱ **EXERCICE 25 : PONT DE WHEATSTONE** ☺

On considère le pont de Wheatstone présenté sur la figure 2.7.

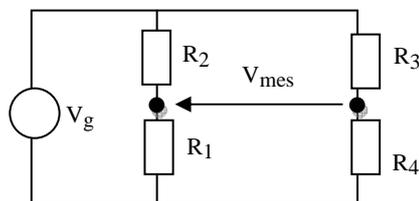


Figure 2.7. : Montage du Pont de Wheatstone

1. Montrer que la tension  $V_{\text{mes}}$  peut être obtenue par l'expression suivante :

$$V_{\text{mes}} = \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot V_{\text{ref}} \quad (2.16)$$

2. A l'équilibre, la valeur de  $V_{\text{mes}}$  est égale à Zéro. En déduire une relation entre  $R_1$  et les autres résistances.
3. On suppose que les résistances  $R_3$  et  $R_4$  sont égales, et que  $R_1 = 2 \times R_2$ . Déterminer l'erreur relative sur  $V_{\text{mes}}$  sachant que l'erreur sur  $V_g$  est égale à 1%.

▪ **EXERCICE 26 : MESURE DE DEBIT PAR DES CAPTEURS A ULTRASONS ☺**

Pour mesurer le débit d'un fluide dans une conduite on peut utiliser la méthode de mesure par variation de la vitesse de transmission des ultrasons dans le sens de l'écoulement et le sens opposé. La Figure 2.8 montre le principe de variation de vitesse de transmission des impulsions. Les capteurs d'ultrasons  $T_1$  et  $T_2$  sont séparés par une distance  $L$ , et placés au milieu d'un fluide en écoulement à la vitesse  $v$ . La vitesse des ultrasons dans le fluide est notée  $c$ . Soit  $t_1$  le temps mis pour parcourir  $T_1$  à  $T_2$ , et  $t_2$  le temps pour le passage de  $T_2$  à  $T_1$ . Dans le reste de l'exercice on négligera la vitesse du fluide  $v$  par rapport à la vitesse des ultrasons  $c$ .

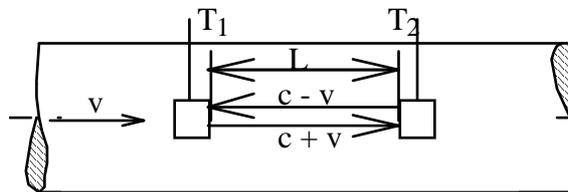


Figure 2.8 : principe de fonctionnement d'un débitmètre à ultrasons

1. Démontrer que la relation entre la vitesse du fluide et la différence de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$  peut s'écrire :

$$v = \frac{c^2}{2 \times L} \times \Delta t \quad (2.17)$$

2. Déterminer la vitesse de l'eau s'écoulant dans une conduite, lorsque la différence de temps enregistrée est de  $3 \mu\text{s}$  pour des capteurs ultrasons distants de 1 cm.
3. Si les erreurs absolues commises sur  $t_1$  et  $t_2$  sont respectivement de  $3 \cdot 10^{-2} \mu\text{s}$  et

$5 \cdot 10^{-2} \mu\text{s}$ , quelle est l'erreur sur  $\Delta t$  ?

4. En déduire l'erreur relative sur  $v$  (calculée à la question 2)

Données :

La vitesse des ultrasons dans l'eau est de  $1500 \text{ m/s}$

# 3 ● TRAITEMENTS STATISTIQUES

---

## Partie 1 : Traitements Statistiques simples

### ✚ EXERCICE 1

La pression d'air en kPa à l'intérieur d'une conduite est mesurée toutes les 15 mn pour une période de 8h. Les résultats obtenus sont regroupés en 4 colonnes comme suit :

Tableau 3.1.a : Résultats de mesure de pression

Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4
779	724	690	669
738	696	662	690
752	676	641	710
669	848	600	724
655	814	558	758
634	772	586	779
710	710	627	827
807	696	648	883

1. Organiser les résultats obtenus dans un ordre croissant. Mettez les données dans 5 intervalles pour obtenir la distribution de fréquence. Calculer la fréquence relative ainsi que la fréquence cumulée. Sélectionner la pression médiane à partir des données.
2. Construire une courbe en histogrammes présentant la distribution. Superposer la courbe de la fréquence.
3. Construire la courbe de la fréquence cumulée
4. Pour les données de Pression,
  - a. Calculer la moyenne relative à chaque colonne
  - b. Calculer la moyenne des colonnes 1+2 et 3+4
  - c. Calculer la moyenne de la totalité des données
  - d. Commenter les résultats obtenus en a, b, c.
5. Déterminer le mode et comparer le avec la médiane et la moyenne des données
6. Déterminer
  - a. l'écart-type  $s_x$
  - b. le domaine R
  - c. la déviation moyenne  $d_x$
  - d. la variance  $s_x^2$
  - e. le coefficient de variation  $C_v$

▪ **EXERCICE 2** ☺

Dans cette expérience, 21 mesures de températures sont réalisées. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Tableau 3.1.b : Résultats de mesure de pression

Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3
121	118,9	119,4
120,4	119,9	120,2
118,8	120,6	119,6
119,9	119,4	120,4
119,6	118,9	119,6
121	120,9	119,8
118,9	120,8	119,6

Reprendre les questions de l'exercice 1

✱ **EXERCICE 3**

Des mesures répétées de l'hauteur d'un bâtiment ont donné les résultats suivant : 33.48, 33.46, 33.49, 33.50, 33.49, 33.51, 33.48, 33.50, 33.47, 33.48, 33.49, 33.50, 33.47, 33.51, 33.50 et 33.48 m.

1. Donner la valeur moyenne, la médiane et le mode de ces mesures
2. Calculer l'écart-type
3. Ecrire proprement le résultat entant que relation de type :  $h = h \pm \Delta h$
4. Dessiner l'histogramme de la distribution

✱ **EXERCICE 4**

A et B observent des flashes de lumière vers le nord. A croit qu'il n y a qu'une seule source, Par ailleurs B croit qu'il y en a deux. La position de chacun des 15 flashes successifs a été mesurée. Les résultats suivants ont été obtenus :

Direction (nord-est) : 10.72°, 11.05°, 11.36°, 10.74°, 11.16°, 10.85°, 10.92°, 11.18°, 10.96°, 10.63°, 11.02°, 11.26°, 10.64°, 10.95°, 11.13°.

1. Montrer ces résultats, entant qu'histogrammes normalisés avec des intervalles de 0.1 de largeur à partir de 10,5°, en considérant respectivement les 5, 10 et 15 premières mesures
2. Est-ce-que vous pensez que l'explication de B peut être justifiée par ce résultat?
3. Les observateurs, dans le problème précédent, ont effectué un total de 200 mesures. A la fin des 100 et 200 mesures la distribution obtenue est la suivante :

Tableau 3.2 : Nombre des mesures dans des intervalles de 0.1°

Intervalles	Nombre d'observation (100 mesures)	Nombre d'observation (200 mesures)
[10,5 - 10,6[	1	3
[10,6 - 10,7[	7	18
[10,7 - 10,8[	13	21
[10,8 - 10,9[	9	17
[10,9 - 11[	6	17
[11 - 11,1[	24	50
[11,1 - 11,2[	24	48
[11,2 - 11,3[	10	20
[11,3 - 11,4[	5	5
[11,4 - 11,5[	1	1

3. Construire les histogrammes relatifs à ces mesures et comparer les.
4. Est-ce-que vous pensez que des résultats suffisamment clairs peuvent être déduits à partir de ces courbes afin de donner raison à A ou à B ?
5. Qui des deux a-t-il raison ? Expliquer votre réponse.

#### ✦ EXERCICE 5

Les mesures suivantes en V sont prises sur la tension de sortie d'un amplificateur à gain élevé qui est perturbé à cause d'une fluctuation du bruit: 1.53, 1.57, 1.54, 1.54, 1.50, 1.51, 1.55, 1.54, 1.56 et 1.53.

1. Déterminer la valeur moyenne et l'écart type,
2. Estimer la précision avec laquelle la valeur moyenne est déterminée à partir de ces dix mesures,
3. Si 1000 mesures ont été prises, au lieu de dix, mais  $\sigma$  est restée la même, de combien l'exactitude de la valeur moyenne calculée pourrait être améliorée?

#### ✦ EXERCICE 6

La mesure de la température à la sortie d'une cheminée nous donne les valeurs suivantes (en degré Celsius) :

135.0, 136.1, 138.9, 142.7, 140.1, 137.2, 142.7, 140.0, 142.8, 134.5

1. Calculer la température moyenne des gaz d'échappement à la sortie de cette cheminée.
2. Calculer l'écart-type,
3. Déterminer l'intervalle de confiance dans l'hypothèse qui dit que la température du gaz à la sortie de cette cheminée est de 139.0 °C.

▪ **EXERCICE 7**

La mesure de la capacité thermique  $C$  d'une vase calorimétrique a donné la série des valeurs suivantes :

Tableau 3.3. Résultats de mesure de capacité thermique

Capacité thermique mesurée (J.K <sup>-1</sup> )	200	210	220	230	240	250	260	270
Effectif	2	9	19	26	24	14	5	1

1. Calculer la valeur centrale  $C_m$
2. Positionner sur le même axe les valeurs  $C_{\min}$ ,  $C_{\max}$  et  $C_m$
3. Ecrire sous la forme usuelle le résultat de la mesure  $C = (C_m \pm \Delta C)$  J.K<sup>-1</sup>
4. Tracer la courbe de distribution de la série des valeurs
5. Qualifier cette distribution

▪ **EXERCICE 8**

Un expérimentateur, lors du déroulement de son expérience, s'intéresse à mesurer le temps  $t$  correspondant à la durée d'un phénomène physique. Des mesures répétées ont permis d'obtenir la série des valeurs suivantes:

Tableau 3.4. Série de mesures de la durée  $t$

T(s)	3,56	3,58	3,57	3,52	3,54	3,56	3,57	3,53	3,56	3,56	3,57	3,59	3,54	3,56
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

1. Classer les valeurs trouvées par ordre croissant et donner pour chaque résultat le nombre  $n$  fois ou il a été trouvé
2. Calculer la valeur moyenne  $T$  de la durée et l'étendue  $r$  des résultats
3. Calculer l'intervalle de temps dans lequel la vraie valeur  $T$  a 95% de chance de se trouver
4. Calculer l'écart type

▪ **EXERCICE 9**

Dans un processus chimique donné, la température est relevée toutes les trois minutes. Les mesures correspondant à la première heure de l'expérience sont données dans la figure suivante :

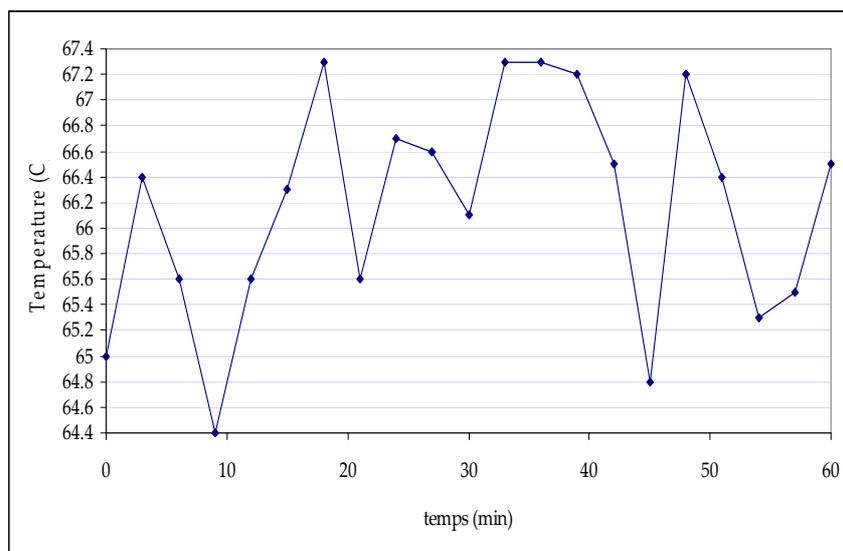


Figure 3.1. Variation de la température en fonction du temps

1. Donner la valeur moyenne la médiane et le mode de ces mesures, Quelle information vous pouvez tirer de ce résultat?
2. Calculer l'écart type,
3. Ecrire proprement le résultat sous la forme :  $T = \bar{T} \pm \Delta T$ ,
4. Etablir les histogrammes correspondant à la distribution,

▪ **EXERCICE 10 ☺**

Dans une conduite cylindrique parcourue par un fluide chaud, le coefficient de transfert de chaleur  $h$  ( $w/m^2°C$ ) entre le fluide chaud et les parois internes de la conduite est donné par la relation suivante:

$$h = 0.023 \times \frac{\lambda}{D} \times Re^{0.8} \times Pr^{1/3} \quad (3.1)$$

Où

$\lambda$  : conductivité thermique du fluide ( $\lambda = 0.4 w/m°C$ ),

$D$  : le diamètre du tube en mètre,

$Re$  : nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement (sans unités),

$Pr$  : nombre de Prandtl caractérisant les transferts thermiques dans la conduite (sans unités),

Afin de déterminer le coefficient  $h$ , plusieurs mesures du diamètre, nombre de Reynolds et nombre de Prandtl sont effectuées. Les résultats sont illustrés dans le tableau suivant :

Tableau 3.5. Table de mesures pour la détermination du coefficient  $h$

N° Mesures	D (mm)	Re	Pr
1	18.6	2120	1.2
2	18.4	2100	1.0
3	18.5	2150	1.1
4	18.6	2135	1.3
5	18.3	2150	1.1

1. Déterminer les valeurs moyennes du diamètre, Nombre de Reynolds et Nombre de Prandtl,
2. Calculer les erreurs réalisées sur ces paramètres,
3. Déduire la valeur moyenne du coefficient de transfert de chaleur,
4. Déterminer l'erreur réalisée sur ce paramètre,
5. Présenter le coefficient de transfert de chaleur sous la forme :  $h = \bar{h} \pm \Delta h$ .

#### ▪ EXERCICE 11

On veut effectuer une mesure du module  $F$  de la force de tension exercée sur la corde vibrante d'un instrument de musique, de longueur  $l$  et de masse linéique (masse par unité de longueur)  $\mu$ . On excite mécaniquement cette corde, et on mesure la fréquence  $\nu$  du son émis par celle-ci lors d'une oscillation libre, c'est-à-dire la fréquence de résonance  $\nu$  de son oscillation libre compte tenu des conditions aux limites (notamment la tension) imposée par son implantation dans l'instrument. On déduit la valeur de  $F$  à partir de celles mesurées de  $\nu$ ,  $l$  et  $\mu$  à l'aide de la relation de résonance :

$$2 \times \nu \times l = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (3.2)$$

1. Etablir, dans le système international d'unités, l'équation aux dimensions associée à la grandeur physique  $\nu$ ,
2. Donner alors son unité,
3. Proposer une méthode de mesure de la force  $F$ ,
4. En supposant que les mesures de  $\nu$ ,  $l$  et  $\mu$  sont indépendantes et que ces grandeurs ont des variations respectives  $\sigma_\nu^2, \sigma_l^2, \sigma_\mu^2$  déterminer l'expression de la variance sur la mesure de  $F$ .

#### ▪ EXERCICE 12

La température  $\theta$  d'un bain thermo-régulé varie en fonction du temps entre

deux limites  $\theta_1$  et  $\theta_2$  selon la loi représentée par la figure 3.2,  $T$  étant la période du phénomène.

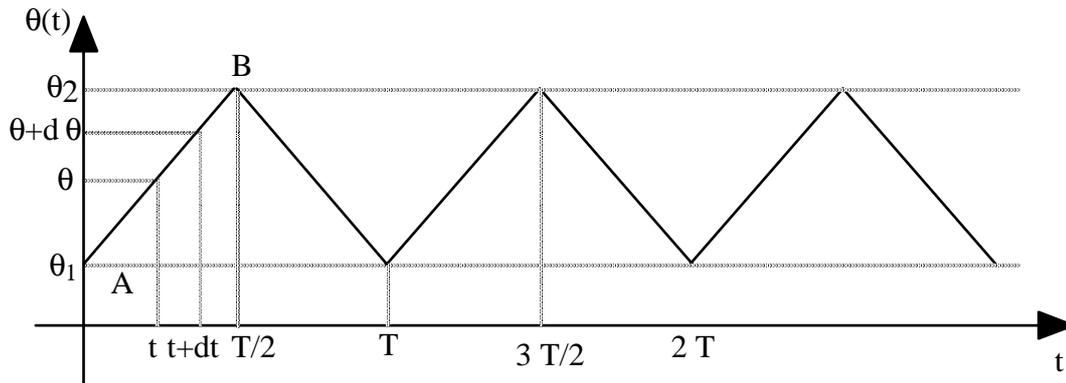


Figure 3.2. Variation de la température  $\theta$  d'un bain thermo-régulé

1. Etablir, pour le domaine correspondant au segment AB de la figure, la loi  $\theta(t)$  de variation de la température en fonction du temps. On donnera  $\theta(t)$  en fonction de  $\theta_1$ ,  $T$  et  $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$
2. Si on effectue dans ce bain un grand nombre d'expériences influencées par la température, la durée de chaque expérience étant beaucoup plus petite que  $T$  et si on ne mesure pas la température lors de chaque expérience, on peut considérer  $\theta$  comme une variable aléatoire dont la valeur numérique est toujours comprise entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On admettra que la probabilité élémentaire  $f(\theta) d\theta$  pour que la température prenne une valeur située entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est égale à  $dt/T/2$  (voir figure 3.2). Calculer  $f(\theta)$  et montrer qu'il s'agit d'une densité de probabilité sachant que  $f(\theta)$  est nulle pour toute température extérieure à l'intervalle  $[\theta_1, \theta_2]$
3. Calculer l'espérance mathématique  $E(\theta)$  et la variance  $V(\theta)$ . Exprimer cette dernière en fonction de  $\Delta\theta$ .
4. L'écart-type  $\sigma$  étant égal à  $\sqrt{V(\theta)}$ , calculer la probabilité pour que la température  $\theta$  ait une valeur numérique comprise entre  $E(\theta) - \sigma$  et  $E(\theta) + \sigma$

### EXERCICE 13

Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux mesures tels que les espérances mathématiques sur  $X_1$  et  $X_2$  sont  $E(X_1) = \mu_1$  et  $E(X_2) = \mu_2$  respectivement et les variances  $V(X_1) = (\sigma_1)^2$  et  $V(X_2) = (\sigma_2)^2$   
On forme  $Y = X_1 \pm X_2$

1. Calculer  $E(Y)$  et  $V(Y)$ . On posera  $\text{cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$  et on l'appellera covariance.
2. Montrer que  $\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - \mu_1 \mu_2$

▪ **EXERCICE 14**

On considère les grandeurs indépendantes  $X$  et  $Y$  dont on connaît  $E(X) = \mu_x$ ,  $E(Y) = \mu_y$ ,  $V(X) = (\sigma_x)^2$  et  $V_y = (\sigma_y)^2$

$X$  et  $Y$  sont liés aux variables aléatoires  $e$  et  $h$  qui représentent respectivement la charge de l'électron et la constante de Planck, par les relations

$$X = \frac{2 \times e}{h} \text{ et } Y = \frac{h}{4 \times e^2} \quad (3.3)$$

Calculer une valeur approchée de  $E(e) = \mu_e$  et  $E(h) = \mu_h$

Applications numériques  $\mu_x = 483,5939 \cdot 10^{12} \text{ Hz/V}$ ;  $\mu_y = 5453,198 \text{ } \Omega$

▪ **EXERCICE 15**

Une bille tombe sans vitesse initiale d'une hauteur de 1 m. On mesure la durée de la chute de la bille à l'aide d'un chronomètre au centième près de seconde. On suppose que les seules erreurs possibles sont accidentelles (aléatoires).

Au cours d'une série de 20 mesures, on a obtenue les résultats suivants :

Tableau 3.6. Temps correspondants aux chutes de la bille

Temps (s)	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47
Nombre de mesure	1	4	10	4	1

1. Tracer l'histogramme du temps,
2. Calculer la valeur moyenne du temps ainsi que l'écart-type,
3. Soit  $x$  une variable aléatoire continue appartenant une loi de distribution normale  $N(\mu, \sigma^2)$  c'est-à-dire que sa densité de probabilité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.4)$$

3.1. Donner l'allure de variation de cette fonction en précisant :

- les coordonnées du maximum
- le ou les points d'inflexion

3.2. Quel est le rôle du coefficient  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  ?

3.3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $x$

3.4. Que représente la surface sous la courbe entre les points  $x_1$  et  $x_2$  ?

3.5. Calculer la probabilité pour que  $x$  soit compris entre  $\mu - k\sigma$  et  $\mu + k\sigma$   
 Application numérique  $k = 1$  et  $k = 2$

4. On désire représenter la distribution du temps par cette fonction mathématique. Donner les valeurs de  $\mu$  et  $\sigma$ .

5. Quelle est la probabilité pour que la mesure soit comprise entre 0.42 et 0.48.  
 On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}; \int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\alpha^2 x^2} dx = 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2.\alpha^3}$$

Ci-dessous, on donne la table de la fonction de répartition de la loi réduite  $N(0,1)$ :

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f(z).dz \text{ et } f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{z^2}{2}}$$

On montre que  $P(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma) = 2 F(k) - 1$

### ▪ EXERCICE 16

Un étudiant effectue 20 mesures de la durée en seconde de chute d'une bille dans un cylindre rempli d'huile. Il trouve :

78	72	75	79	76	71	72	80	75	73
79	76	80	78	74	74	77	73	71	77

1. Ordonner les résultats dans l'ordre croissant et remplir le tableau suivant :

Temps (s)	....
effectif	...

2. Calculer :

- 2.1. La probabilité de trouver chaque mesure,
- 2.2. La valeur moyenne,
- 2.3. La variance et l'écart type,

3. Diviser la population en 6 classes, déduire la probabilité de trouver une mesure dans chacune des classes,

4. Pour qualifier l'expérience précédente, l'étudiant a eu l'idée d'utiliser une distribution de mesure de type :

$$f(t) = \begin{cases} C & 0 < a_1 < a_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \text{ Ou } C, a_1 \text{ et } a_2 \text{ sont des constantes}$$

Tracer  $f(t)$

5. 5.1. Donner la condition pour que  $f(t)$  soit une distribution
- 5.2. Déduire que :

$$C = \frac{1}{a_2 - a_1} \quad (3.5)$$

6. Calculer l'expression mathématique de  $\mu$  et la variance. En déduire l'écart type,
7. Déterminer la distribution d'erreur  $f(e)$ ,
8. Calculer la probabilité de trouver une mesure entre  $t_1$  et  $t_2$ , de même la probabilité de commettre une erreur entre  $e_1$  et  $e_2$
9. Calculer la probabilité d'avoir une mesure entre  $\mu - k\sigma$  et  $\mu + k\sigma$  ou  $k$  est un entier naturel. Déduire la valeur maximale de  $k$ ,
10. Calculer  $a_1$  et  $a_2$  pour que la distribution  $f(t)$  décrive la population et la question 1,

▪ **EXERCICE 17**

On mesure une longueur à l'aide d'une règle étalonnée. Chaque détermination  $x_i$  peut être représentée par la relation suivante :

$$X_i = l_i - l_{0,i} + A \quad (3.6)$$

Où  $l_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  lecture de la règle;  $l_{0,i}$  est un terme qui décrit le positionnement du zéro de la règle et  $A$  est un terme correctif donné par le laboratoire qui a étalonné la règle.

On suppose connus les écarts-types  $\sigma_l$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_A$  qui représentent l'incertitude de lecture, l'incertitude de positionnement du zéro et l'incertitude d'étalonnage.

$l_i$ ,  $l_{0,i}$  et  $A$  sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes.

1. Calculer l'écart-type  $\sigma_x$  d'une mesure

Application numérique :

$$\sigma_0 = 0.8 \text{ mm} \quad \sigma_A = 0.15 \text{ mm}$$

2. On effectue deux mesures  $x_i$  et  $x_j$ . Calculer la covariance entre  $x_i$  et  $x_j$

## Partie 2 : Régression Linéaire ou Méthode des Moindres Carrées

### EXERCICE 18

- Déterminer les coefficients  $m$  et  $b$  de la droite d'équation  $y = m x + b$  obtenue à partir de la régression linéaire appliquée aux données suivantes:

Tableau 3.7. Données diverses de mesures

x	y	x	y
0.5	1.4	2.8	8.4
0.9	2.9	3.2	9.8
1.4	4.4	3.5	10.7
2.0	6.2	3.9	11.4
2.3	7.1	4.2	12.4

- Déterminer le coefficient de corrélation  $\rho^2$  pour l'analyse de régression

### EXERCICE 19

Au cours de la mesure du courant et de la tension aux bornes d'une résistance, on trouve le tableau de mesure suivant :

Tableau 3.8. Mesure de tension aux bornes de la résistance

Tension (V)	2	6	10	12
Courant (mA)	2	9	16	18

Déterminer la droite  $V = m.I + b$

$$\text{Sachant que } m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

et

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

### EXERCICE 20

Soient les deux grandeurs physiques  $E$  et  $V$  reliées par l'équation suivante :

$$E^2 = A + B \times V^n \quad (3.7)$$

Avec  $A$ ,  $B$  et  $n$  des constantes d'étalonnages.

Le tableau suivant montre les résultats d'un expérimentateur au cours de son étalonnage:

Tableau 3.9. Résultats d'étalonnage du capteur

E	3,76794	4,039329	4,144704	4,40901	4,61485	5,147786
V	3	5	6	9	12	E

En absence de V,  $E = E_0 = 2,44949$

Déterminer les valeurs des constantes A, B et n avec 5 chiffres significatifs à l'aide d'une méthode de votre choix.

▪ **EXERCICE 21 ☺**

Un capteur de température donne un signal en courant  $i$ , proportionnel à la température absolue  $T$ , lorsqu'on lui applique une tension  $V_s$  (entre 4 et 30 V). Le capteur a une sensibilité de  $1 \mu\text{A}/\text{K}$ .

Le capteur est connecté à une résistance (figure 3.3). La tension  $V_0$  est mesurée aux bornes de la résistance. Ce circuit est utilisé comme un système pour la mesure de la température.

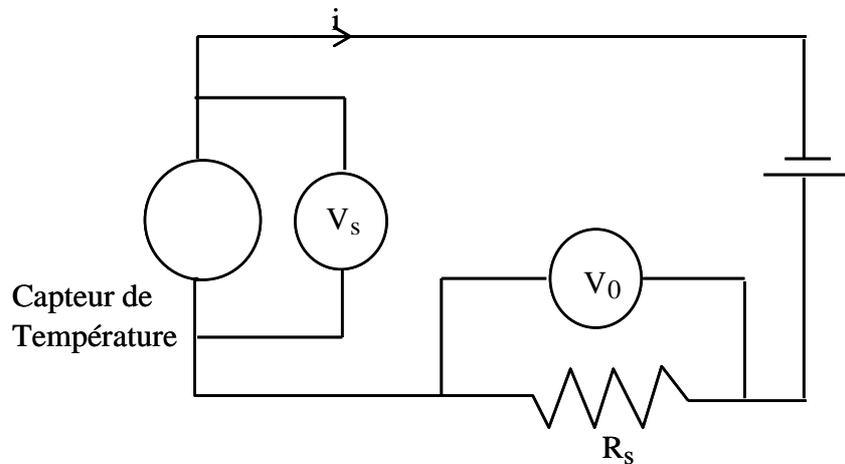


Figure 3.3. Montage du capteur de température

Le tableau 3.10 donne les valeurs de la température ainsi que les courants  $i$  et les tensions  $V_0$  aux bornes de la résistance.

Tableau 3.10. Variation des paramètres électriques  $i$  et  $V_0$  en fonction de la température

<b>T[K]</b>	298	323	373	398	423
<b>i[<math>\mu\text{A}</math>]</b>	298	323	373	398	423
<b><math>V_0</math>[mV]</b>	10.6	11.5	13.3	14.1	15.0

1. Expliquez le principe de la méthode des moindres carrés
2. Démontrer les relations :

$$(1) m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} ; (2)$$

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} \quad (3.8)$$

3. Trouver la valeur de la résistance  $R_s$  en utilisant la méthode des moindres carrés.

**N.B :** La suite de l'exercice est portée à l'exercice 4 du chapitre 4, pour l'étude des caractéristiques du capteur

▪ **EXERCICE 22 ☺**

Dans un laboratoire de mesure, le préparateur désire étalonner un thermocouple pour l'utiliser dans une expérience importante. Il sait que la relation entre la sortie de l'instrument (U) et l'entrée (T) s'écrit :

$$U = a \times T^b \quad (3.9)$$

Où a et b sont deux constantes

Pour cela, il utilise un bain thermostaté et il relève la valeur de la tension pour 10 valeurs constantes de la température. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

Tableau 3.11. Variation de la tension en fonction de la température

T(°C)	U(mV)	T(°C)	U(mV)
20,0	1,38	45,0	4,65
25,0	2,38	50,0	5,56
30,0	3,10	60,0	7,25
35,0	3,65	70,0	8,25
40,0	3,95	75,0	9,35

1. Déterminer à partir de la méthode de la régression linéaire les constantes a et b
2. Est-ce-que la relation utilisée par le préparateur est acceptable ou non?

✱ **EXERCICE 23**

Pour l'étalonnage d'une PT100, on suppose que la variation de la résistance en fonction de la température s'écrit de la façon suivante :

$$R = R_0 \times (1 + a_1 T + a_2 T^2) \quad (3.10)$$

Où  $R_0$  est la valeur de la résistance à 20°C.

1. Déterminer, en se basant sur les données  $(T_i, R_i)$  l'expression des constantes  $a_1$  et  $a_2$  en utilisant la méthode des moindres carrés.
2. En se basant sur les résultats de mesures illustrés dans le tableau 3.12, donner les meilleurs estimations des deux valeurs  $a_1$  et  $a_2$ .

Tableau 3.12. Résultats de mesure de résistance

<b>T</b>	20	25	30	35	40	45	50	55	60
<b>R(T) en <math>\Omega</math></b>	122.5	144.8	147.9	158.3	169.1	182.3	194.9	211.1	227.1

✱ **EXERCICE 24** ☺

La résistance d'une thermistance à une température T est donnée par la relation suivante :

$$R = R_0 \exp \left[ \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (3.11)$$

Où :

$R_0$  : La valeur de la résistance à la température  $T_0$  [K]

$\beta$  : une constante dans le domaine considéré

$R_0 = 5000 \Omega$  à 23 °C

Un étalonnage est réalisé afin de déterminer la valeur de la constante  $\beta$  dans le domaine d'étude.

1. Donner la signification de l'étalonnage et expliquer comment conduire une telle d'expérience
2. Les résultats expérimentaux obtenus sont illustrés dans le tableau suivant:

Tableau 3.13. Résultats de mesure de température

T(°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
R( $\Omega$ )	5000	3950	365	2890	2500	2150	1860	1630

En utilisant la régression linéaire (méthode des moindres carrés) déterminer la meilleure estimation de  $\beta$

### ✦ EXERCICE 25

On considère la relation suivante qui relie l'angle de perte  $\delta$  d'un condensateur, la capacité  $C$ , la résistance  $R$  et la fréquence  $f$ :

$$\operatorname{tg}\delta = 2 \times \pi \times R \times C \times f \quad (3.12)$$

1. Calculer l'incertitude absolue commise sur  $\operatorname{tg}\delta$  ; on donne  $R = 4500\text{K}\Omega$  à 1% ;  $C = 3300\text{pF}$  à 0.5% et  $f = 1000\text{Hz}$  à 2%.
2. Exprimer correctement le résultat de mesure de  $\operatorname{tg}\delta$ .  
On mesure la puissance réactive  $Q$  (en VAR) d'un récepteur de puissance active  $P = 1500\text{W}$  à 1% prêt ; et de déphasage  $\varphi = 0.02$  radians à 2% prêt.
3. Calculer  $Q$  et présenter correctement le résultat de mesure.  
On rappelle que  $Q = P.\operatorname{tg}\varphi$

### ▪ EXERCICE 26 ☺

La mesure du débit du sang dans un faisceau sanguin peut se faire grâce au montage de la figure 3.4. Dans ce montage on mesure le décalage du temps entre la transmission des ondes à ultrasons des capteurs  $T_1$  vers  $T_2$  (temps  $t_1$ ) et de  $T_2$  vers  $T_1$  (temps  $t_2$ ). Les deux capteurs sont distants de  $L$ . On démontre que la relation entre la vitesse du fluide  $v$  est l'écart de temps  $\Delta t = t_2 - t_1$  peut s'écrire :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2 \times L \times v \times \cos\theta}{c^2} \quad (3.13)$$

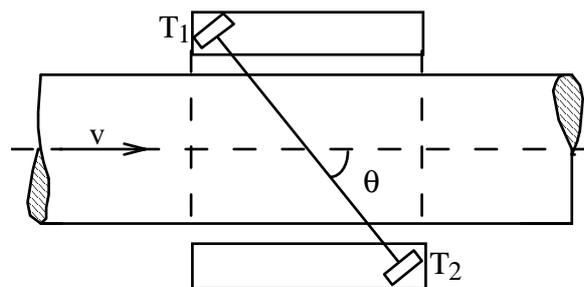


Figure 3.4 : principe de fonctionnement d'un débitmètre à ultrasons

Dans une expérience, les temps enregistrés par le débitmètre à ultrasons sont les suivants :  $t_1 = 1,04 \pm 0,03 \mu\text{s}$  et  $t_2 = 4,34 \pm 0,02 \mu\text{s}$

Les autres paramètres mesurés sont :  $\theta = 45^\circ$  ;  $L = 2 \text{ cm}$  et  $c = 1000 \text{ m/s}$

Les erreurs effectuées durant la mesure sont les suivantes :

- sur l'angle  $\theta$  est  $\Delta\theta = 0,01^\circ$  ;

### Chapitre 3. : Traitements statistiques

- sur la longueur L est  $\Delta L = 0,1 \text{ mm}$ .

1. Calculer la valeur de la vitesse du sang dans le vaisseau
2. Quelle est l'erreur sur la différence de temps  $\Delta t$  ?
3. En déduire l'erreur sur la vitesse

Dans une expérience, nous avons fait varier l'angle  $\theta$  et nous avons relevé les temps enregistrés par le débitmètre  $t_1$  et  $t_2$ . Les résultats obtenus sont illustrés dans le tableau suivant :

Tableau 3.14. Résultats de mesure avec un débitmètre à ultrasons

$\theta^\circ$	$t_1 (\mu\text{s})$	$t_2 (\mu\text{s})$
0	3,80	5,12
10	4,60	5,81
20	5,30	6,42
30	2,70	3,76
40	4,60	5,49
50	5,70	6,46
60	3,40	4,07
70	4,40	4,79
80	5,61	5,84
90	3,42	3,43

4. Tracer sur le papier millimétré la courbe  $\Delta t = f(\cos \theta)$ ,
5. En utilisant la méthode de la régression linéaire (moindres carrés), déterminer la vitesse du sang dans le vaisseau,
6. Est-ce que la régression utilisée est bonne ?
7. Quelle est l'erreur systématique réalisée ? Déterminer sa valeur.

#### ▪ EXERCICE 27

Un diaphragme est un système permettant la mesure de débit massique d'un fluide circulant dans une conduite en mesurant la variation de pression entre l'amont et l'aval du système. La relation entre le débit et la différence de pression est la suivante :

$$q_m = K \frac{\pi}{4} D^2 \sqrt{\rho \Delta P} \quad (3.14)$$

Où  $q_m$  est le débit massique,  $\Delta P$  est l'écart de pression entre l'amont et l'aval du diaphragme et D le diamètre du tube.

1. Si  $K = 1,0$ ,  $\Delta P = 100,0$  Pascal,  $D = 20,0$  cm et  $\rho = 1$  kg/l. Calculer le débit massique du fluide en (kg/s)
2. Si les erreurs relatives possibles sur les mesures de  $\Delta P$  et de  $D$  sont de 1%, donner une estimation de l'erreur absolue possible dans le calcul de débit massique obtenue en 1.
3. Quelles sont les erreurs commises pendant cette expérience. Préciser se elles sont aléatoires ou systématiques.
4. Durant une expérience réalisée avec de l'eau ( $\rho=1,0$  kg/l), une conduite de 2 cm de diamètre est utilisée. Les valeurs de  $q_m$  sont mesurées pour différentes valeurs de  $\Delta P$ . Les résultats de cette expériences sont illustrés dans le tableau suivant (Tableau 3.15) :

Tableau 3.15. Résultats relatifs aux mesures de débits

$\Delta P$ (Pascal)	$q_m$ (kg/s)
100	0,88
150	1,07
200	1,29
250	1,39
300	1,61

5. Etablir des équations permettant de déterminer les coefficients de la régression linéaire (moindre carrées)
6. En déduire la valeur de la constante  $K$

## 4 ● CARACTERISTIQUES DES CAPTEURS

---

### ✦ EXERCICE 1

Pour mesurer le débit d'un liquide dans un tube, une turbine peut être utilisée. Ce type de capteur est étalonné dans un environnement de 20°C et les caractéristiques « vitesse de rotation/débit liquide » obtenus sont résumées dans le tableau suivant :

*Table 4.1. Caractéristiques du capteur à 20°C*

Rotational speed (rd/s)	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
Liquid flow (Kg/s)	0,00	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50

1. Expliquer le principe de fonctionnement de ce type de capteur,
2. Déterminer sa sensibilité à 20°C,
3. Le capteur est utilisé pour mesurer le débit d'un liquide à 50°C, lister les différentes erreurs qui peuvent être faites et préciser si elles sont systématiques ou aléatoires,
4. L'expérience réalisée à 50°C montre que les caractéristiques de la turbine changent comme suit:

*Table 4.2 Caractéristiques du capteur a 50°C*

Rotational speed(rd/s)	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
Liquid flow (Kg/s)	0,1	0,35	0,64	0,85	1,1	1,6

Déterminer la sensibilité à 50°C

### ✦ EXERCICE 2

Un capteur est étalonné dans un environnement à une température de 21°C. Les caractéristiques déflexion/charge sont illustrées dans le tableau suivant:

*Table 4.3. Caractéristiques déflexion/charge à 21°C*

Charge (kg)	0	50	100	150	200
Déflexion (mm)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0

Quand il est utilisé à 35°C, ses caractéristiques changent comme suit:

Table 4.4. Caractéristiques deflection/charge à 35°C

Charge (kg)	0	50	100	150	200
Deflection (mm)	0.2	1.3	2.4	3.5	4.6

1. Déterminer la sensibilité du capteur à 21°C et 35°C. Que remarquez-vous?
2. Calculer le décalage à zéro et l'écart de sensibilité à 35°C.

✱ **EXERCICE 3: CALCUL D'EXACTITUDE ☺**

La sensibilité d'un thermomètre à résistance (sonde Pt100) dont la résistance vaut  $100\Omega$  à  $0^\circ\text{C}$  est de l'ordre de  $3,9 \cdot 10^{-1} \Omega/^\circ\text{C}$ , supposée sensiblement constante avec la température (variation linéaire de la résistance avec la température).

Calculer la précision sur la mesure de température si l'on mesure la résistance de la sonde avec une incertitude de 0,1% au voisinage de  $100^\circ\text{C}$ .

▪ **EXERCICE 4 :**

On reprend l'exercice 19 du chapitre 3

1. On suppose que la seule erreur significative soit dans la valeur de  $V_0$ , trouvez le décalage par rapport à zéro du voltmètre.
2. Calculer la sensibilité du système de mesure.
3. Si la résolution du voltmètre est de 0.1 mV, calculer la résolution de l'ensemble du système de mesure de la température (en K)
4. Si l'étendue de mesure (Range) du voltmètre est de 0.0 à 15.0 mV, trouvez le domaine de mesure du système de mesure de température.

▪ **EXERCICE 5**

1. Soit une résistance destinée à la mesure de la température dont les caractéristiques telles que définies par le fabricant sont données par le tableau suivant :

Tableau 4.5. Caractéristiques de la résistance

T[°C]	0	25	50	75	100
R[Ω]	100	110	120	130	140

2. Déterminer la sensibilité de cette résistance. Utiliser pour cela la méthode des moindres carrés (Régression linéaire)
3. On utilise un Ohm-mètre qui a une résolution de  $0.1 \Omega$ . Quelle est la résolution en température qu'on peut avoir avec l'ensemble Ohmmètre-

Résistance?

4. On branche la résistance dans le circuit suivant :

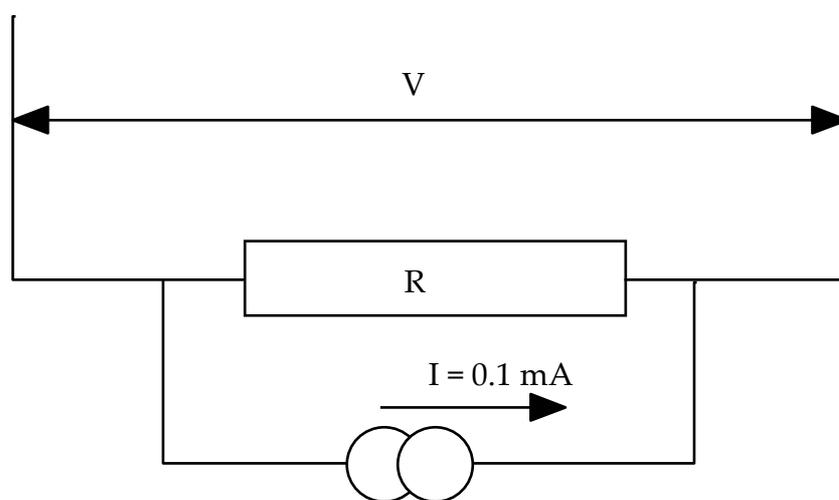


Figure 4.1. Montage ohmique

On mesure la tension au lieu de mesurer directement la résistance. La personne qui a effectué le branchement n'est pas expérimentée en soudure. Elle a mis une grosse boule d'étain lors de la soudure de la résistance. On mesure alors la tension aux bornes de la résistance en fonction de la température, on trouve le tableau suivant (le courant I étant constant et égal à 0.1 mA) :

Tableau 4.6. Résultats de l'expérience

T[°C]	0	25	50	75	100
U[mV]	10.2	11.2	12.2	13.2	14.2

- Déduire les valeurs des résistances en fonction de la température.
- Quel est l'effet de la boule d'étain sur ce capteur de température ?
- Comment appelle-t-on ce phénomène ?
- Comment classez-vous ce type d'erreurs (systématique ou aléatoire)? Expliquez votre réponse.

### ✳ EXERCICE 6

Développer l'expression pour la réponse d'un capteur de température à un changement au niveau de la fonction Input, présentée dans la figure suivante:

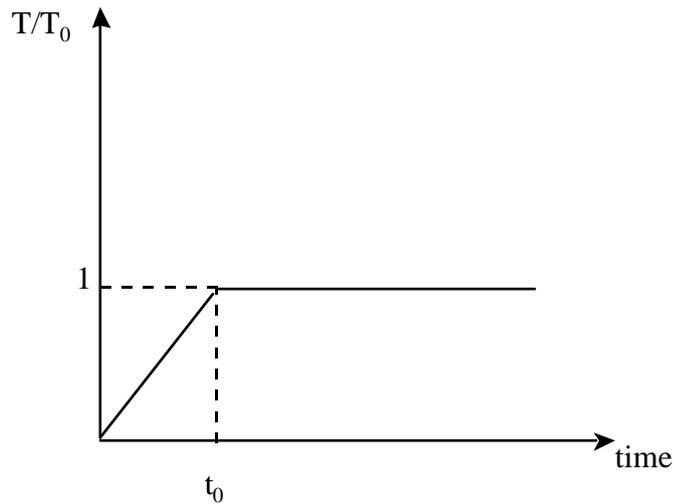


Figure 4.2. Changement au niveau de la fonction Input d'un capteur

### ✦ EXERCICE 7

Utiliser l'équation suivante :

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\lambda \times T}{C_2} \times \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (4.1)$$

Où

$$C_2 = 1.44 \cdot 10^{-2} \text{ m.K}$$

$$\lambda = 0.63 \text{ } \mu\text{m}$$

Pour préparer un graphe d'erreur ( $dT/T$ ) en fonction de la température  $T$  sur un domaine allant de  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  à  $4000 \text{ }^\circ\text{C}$  pour un pyromètre optique si l'émissivité  $\varepsilon$  de la surface à une erreur ( $d\varepsilon/\varepsilon$ ) égale à :

- (a) 0.05      (b) 0.10      (c) 0.20      (d) 0.50

### ▪ EXERCICE 8

On considère un capteur de température de forme sphérique, de diamètre  $D$ , de masse  $m$  et de chaleur massique  $C_p$ .

Ce capteur sert à mesurer la température d'un fluide. A l'instant initial  $t_0 = 0$ , la température du fluide est  $T_0$  et celle du capteur est  $0^\circ\text{C}$

A  $t_0 = 0$ , le capteur est immergé soudainement dans le fluide. L'échange de chaleur entre le capteur et le fluide s'effectue uniquement par convection.

1. Montrez qu'il s'agit d'un système de premier ordre et que sa constante de temps  $t$  est donnée par :

$$\tau = \frac{m.C_p}{h.A} \quad (4.2)$$

A étant la surface du capteur, h est le coefficient d'échanges de chaleur par convection.

2. On considère maintenant que la température du fluide suit la courbe suivante:

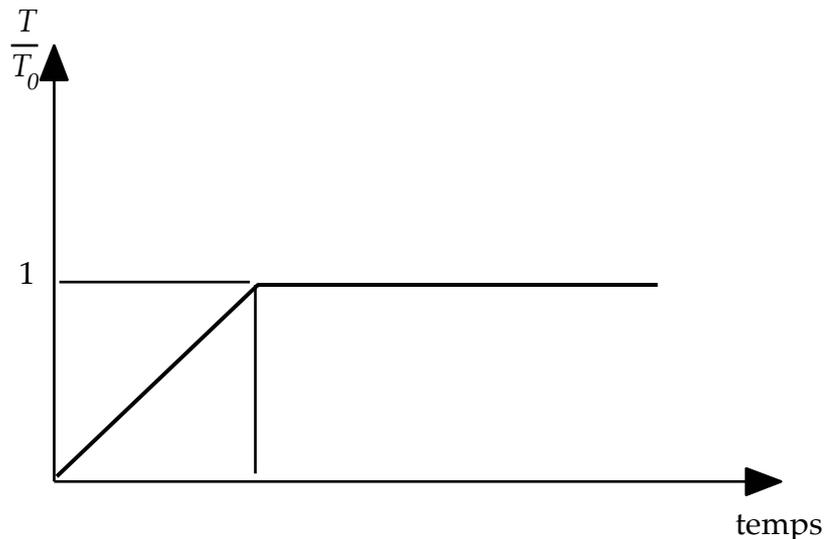


Figure 4.3. Variation de la température en fonction du temps

4. On change maintenant de capteur. On considère que la mesure doit être effectuée grâce à un thermocouple. On considère que la jonction de mesures du thermocouple est constituée d'une sphère dont les caractéristiques sont les suivantes:

$$D = 0.5 \text{ mm}$$

$$\rho = 8920 \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 394 \text{ J / kg K}$$

$$\lambda = 23 \text{ W / m K}$$

Quelle est la constante de temps du thermocouple lorsque la vitesse d'écoulement est de 1 m/s ? Commentez ce résultat

#### ▪ EXERCICE 9

Nous voulons mesurer grâce à un thermocouple la température d'un four toutes les 2 minutes, pendant 24 heures. La mesure doit s'effectuer d'une manière automatique

1. Décrivez les composants ainsi que les caractéristiques requises pour le système de mesure.

- La valeur mesurée doit avoir une résolution de  $5^{1/2}$  digits. Expliquez la signification de ce nombre

▪ **EXERCICE 10**

On souhaite mesurer un déplacement angulaire avec une résolution d'au moins  $1^\circ$ .

- Quelles sont les différentes techniques utilisées ?
- Donnez les avantages et les inconvénients de chacune d'elles.
- Présentez les caractéristiques métrologiques de la chaîne de mesures dans chaque cas.

✱ **EXERCICE 11**

Un thermocouple de type K (Chromel-Alumel) est utilisé pour la mesure de température dans un four. La jonction de mesure est à l'intérieur du four; la jonction de référence a la température ambiante. La température ambiante est mesurée par un thermomètre à mercure.

- La valeur obtenue pour la température ambiante est  $(18.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$ . La lecture du voltmètre donne 9.19 mV. Quelle est la valeur de la température du four?
- La résolution du voltmètre est de 0.01 mV, est ce qu'il est intéressant de changer le thermomètre à mercure par un deuxième ayant une résolution de  $0.1^\circ\text{C}$  ? Quelle est la résolution du système de mesure de la température du four?
- Calculer l'incertitude obtenue sur la température du four?

▪ **EXERCICE 12**

Le Tableau ci-dessous montre l'évolution en fonction du temps  $t$  de la température  $T$  indiquée par un thermomètre à mercure au cours de son refroidissement à l'air ambiant de température  $T_s = 19^\circ\text{C}$ .

Tableau 4.7. Variation de la température en fonction du temps

T(°C)	70	65	60	55	50	45	40	35
t (s)	0,0	13,0	26,5	44,5	62,0	85,0	114,0	154,0

- Tracer la droite  $(T(t)-T_s)/(T_i-T_s)$  en fonction du temps  $t$  sur un papier semi-logarithmique,  $T_i$  étant la température initiale  $70^\circ\text{C}$ .

On pose :

$$A = \frac{T(t) - T_s}{T_i - T_s} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (4.3)$$

- Calculer  $\tau$  la constante du temps du thermomètre à partir de la pente de cette

droite

3. Calculer l'incertitude  $\Delta A$  en fonction de  $\Delta T$ ,  $T_i$  et  $T_s$ , on prendra  $\Delta T_i = \Delta T_s = \Delta T(t) = \Delta T$
4. Proposer, en utilisant  $\Delta A$  et  $\Delta t$ , une méthode graphique pour déterminer  $\Delta \tau$ .
5. Expliquer l'utilité de la constante de temps dans une mesure de température

■ **EXERCISE 13 : CONVERSION PAR VARIATION DE RESISTANCE**

Le curseur d'un potentiomètre est lié à une membrane ou capsule de manière à ce que la déformation de ce corps d'épreuve entraîne un déplacement du curseur.

Le potentiomètre de résistance totale  $R_n$  est alimenté par une f.e.m  $e$ . (Voir figure 4.4)

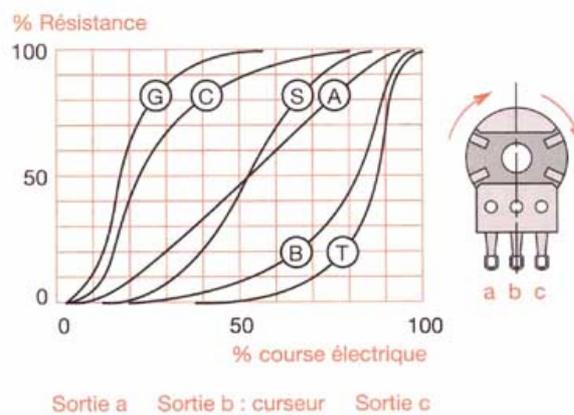


Figure 4.4. Potentiomètre par variation de résistance

1. Quelle est la grandeur physique pour laquelle ce capteur est spécifiquement conçu?
2. Quel est le signal électrique fourni par ce capteur?
3. a. Donner l'expression de la tension  $V_m$  entre le curseur et l'une de ces extrémités  
b. S'il y a une proportionnalité entre:
  - pression  $p$  à mesurer et déformation du corps d'épreuve
  - déformation du corps d'épreuve et déplacement  $x$  du curseur
  - déplacement  $x$  du curseur et résistance  $R(x)$

Comment s'écrit alors  $V_m$ ?

4. L'amplitude du signal de sortie est de l'ordre du volt. Quel est l'avantage de disposer d'un signal de sortie élevé?
5. A votre avis quels sont les inconvénients de ce type de capteurs?
6. Proposer l'instrumentation associée à ce capteur

#### ■ EXERCISE 14 : CAPTEUR HYDROELECTRIQUE

Un détecteur hydroélectrique est utilisé pour la mesure des rayonnements optiques. Le détecteur hydroélectrique est un détecteur thermique qui absorbe le rayonnement incident et le transforme en chaleur. Il en résulte une élévation de la température de l'élément sensible du détecteur. Cette variation de la température entraîne une modification des propriétés du matériau.

Un détecteur hydroélectrique est exposé à un flux de rayonnement incident de puissance  $\Phi$  et de pulsation  $\omega$ ; la température de celle-ci sera modulée avec la même pulsation, mais avec une amplitude fonction de la fréquence. La différence de température  $\theta = T - T_a$  entre le détecteur à la température  $T$  et le support thermique à la température ambiante  $T_a$ , est déduite du bilan global des transferts d'énergies au niveau du détecteur. Celui-ci est traduit par l'équation suivante:

$$\Phi(t) = C_{th} \frac{d\theta}{dt} + G_T \theta \quad (4.4)$$

Avec

$C_{th}$ : capacité calorifique du détecteur (J/K)

$G_T=1/R_{th}$ : conductivité thermique u système (W/K)

$\Phi$ : Puissance du flux de rayonnement incident (W)

1. Expliquer le principe de fonctionnement de ce capteur.
2. Donner le montage électronique correspondant, en précisant l'input et l'output de ce capteur.
3. Montrer alors que la sensibilité de ce capteur est de la forme:

$$R_i = \left| \frac{I_p}{\Phi} \right| \quad (4.5)$$

4. S'agit-il d'un capteur de premier ou de deuxième ordre?
5. Donner l'expression de la température  $\theta(t)$  suite à une excitation de rayonnement  $\Phi(t) = \Phi_0 e^{j\omega t}$ .
6. Donner alors l'expression de la sensibilité du détecteur hydroélectrique

#### ■ EXERCISE 15 : MESURE DE NIVEAU PAR METHODE HYDROSTATIQUE

Un capteur de pression différentielle est placé (fixe) à la base d'un réservoir (Figure 4.5) où la pression  $P$  a pour valeur  $P = P_0 + \rho gh$ .  $P_0$  étant la pression au sommet du réservoir, égale ou non, selon les cas, à la pression atmosphérique.  $\rho gh$

est la pression hydrostatique due à la hauteur  $h$  du liquide de densité  $\rho$ , l'accélération de la pesanteur étant  $g$ . Le capteur a pour corps d'épreuve une membrane soumise sur l'une de ses faces à la pression  $P$  est sur l'autre face à la pression  $P_0$ . La déformation de la membrane, convertie en signal électrique, est rationnelle au niveau  $h$ .

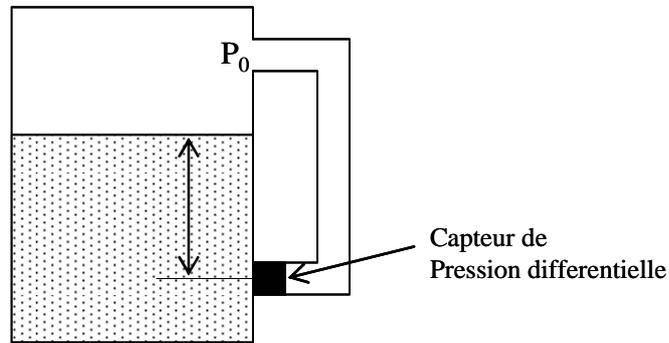


Figure 4.5. Capteur de pression différentielle

1. Rappeler l'unité de la pression exprimée dans le système international.
2. La hauteur  $h$  à mesurer n'est pas convertie directement en signal électrique. Donner la suite des conversions intermédiaires réalisées avant d'aboutir au signal électrique.
3. Quelles sont les grandeurs d'influences susceptibles de fausser la mesure du niveau  $h$ ?

Le capteur de pression différentielle comme son nom l'indique est sensible à la différence de pression  $P-P_0$  et la convertie en variation de capacité (Figure 4.6)

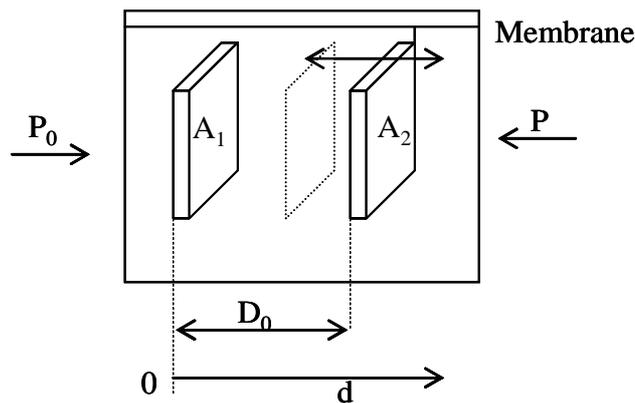


Figure 4.6. Principe de fonctionnement du capteur de pression

Le capteur est constitué d'un condensateur  $C$ , composé de deux armatures  $A_1$  et  $A_2$  ayant la même surface  $A$ . L'armature  $A_2$  est liée aux deux membranes de manière à ce que leur déformation entraîne un déplacement perpendiculairement à son plan.

Soit  $d$  son déplacement par rapport à la position d'origine (Armature  $A_1$ )

4. Donner l'expression de la capacité du condensateur formé par les deux armatures.
5. Quelle est la grandeur physique mesurée? Quelle est la grandeur électrique fournie?
6. Expliquer brièvement le principe de fonctionnement de ce capteur.
7. En supposant que le déplacement de l'armature  $A_2$  est proportionnel à la différence de pression  $P-P_0$  ( $d=K.(P-P_0)$ ), donner l'expression de  $C$ .
8. Comment peut-on utiliser ce dispositif expérimental pour la mesure de la masse volumique  $\rho$ ?

## 5 ● MESURE DE TEMPERATURES

---

### 5.1. BILAME METALLIQUE

#### ✦ EXERCICE 1

Une bilame métallique est fabriquée à partir de l'acier inoxydable et le zinc d'épaisseurs respectives 5 mm et 1 mm. Déterminer le rayon de courbure de la bande métallique si elle subit une variation de température de :

- a) 120 °C      b) 230°C      c) -80°C

Les propriétés mécaniques et thermiques de l'acier inoxydable et du zinc sont les suivantes :

Acier inoxydable :	$E = 193 \text{ Gpa}$	$\alpha = 17.3 (10^{-6})/^{\circ}\text{C}$
Zinc :	$E = 145 \text{ Gpa}$	$\alpha = 1.1 (10^{-6})/^{\circ}\text{C}$

#### ✦ EXERCICE 2 : BAIN THERMOSTATE

Une bilame métallique est fabriquée à partir de l'acier inoxydable et de l'Invar avec des épaisseurs respectives de 4 mm et de 2 mm. Ce capteur est utilisé dans un thermostat pour contrôler la température.

Les propriétés thermomécaniques de l'acier inoxydable et de l'invar sont comme suit :

Acier inoxydable :	$E_1 = 193 \text{ Gpa}$	$\alpha_1 = 17.3 (10^{-6})/^{\circ}\text{C}$
Invar	$E_2 = 145 \text{ Gpa}$	$\alpha_2 = 1.1 (10^{-6})/^{\circ}\text{C}$

1. Expliquer le principe de fonctionnement de ce capteur dans ce cas.
2. L'objectif de cette expérience est de maintenir la température à une valeur de 120°C. Donner l'expression de l'allongement de la barre en fonction de la température.  
Déterminer l'allongement de chacune de deux barres à cette température.  
La longueur de la barre, supposée droite à 10°C, est de 22 cm.
3. Déterminer le rayon de courbure de la barre à une température de 120°C.

$$\rho = \frac{\left[ 3 \times (1 + r_h)^2 + (1 + r_h r_e) \left( r_e^2 - \frac{1}{r_h r_e} \right) \right] \times h}{6 \times (\alpha_1 - \alpha_2) \times (1 + r_h) \times \Delta T} \quad (5.1)$$

Où:

$$r_h = \frac{h_2}{h_1} = \text{le rapport des épaisseurs}$$

$$r_e = \frac{E_2}{E_1} = \text{le rapport des modules d'élasticité}$$

4. Déterminer la sensibilité de ce capteur à 120°C (Ecrire la relation précédente sous la forme:  $\rho = \frac{K}{\Delta T}$  ).
5. Si la plus petite valeur qui peut être mesurée par le capteur mesurant le rayon de courbure est de 0.001 mm, déterminer la résolution de la barre à cette température.
6. La longueur  $L(T)$  de la bilame métallique à la température  $T$ , est supposée égale à la moyenne des longueurs des deux barres utilisées. Le bouton contrôlant le thermostat est placé à une distance  $e$  en dessous de l'extrémité de la barre, supposée droite à la température  $T_0$  (figure 5.1).

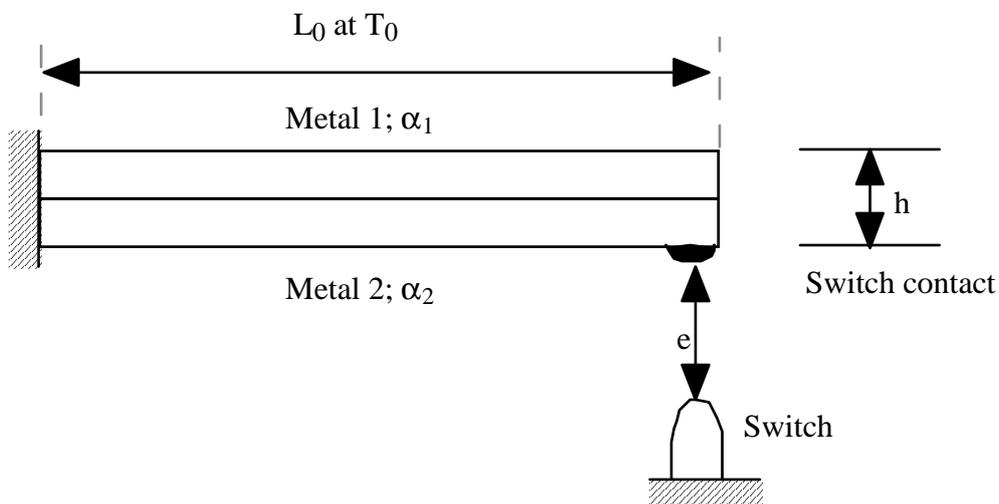


Figure 5.1. Principe de fonctionnement d'une bilame métallique

Démontrer que pour maintenir la température du système à une valeur constante  $T$ , le bouton poussoir doit être placé à une distance  $e$  telle que :

$$e = \rho(T) \times \left( 1 - \cos \left( \frac{L(T)}{\rho(T)} \right) \right) \quad (5.2)$$

Calculer  $e$  pour  $T = 120^\circ\text{C}$

7. Si les erreurs sur  $L(T)$  et  $\rho(T)$  sont de 1% déterminer l'erreur possible sur la distance  $e$ .

▪ **EXERCISE 3 : LAME D'ALARME**

Le système d'alarme thermique est constitué :

- d'une lame de longueur  $L = L_0 = 20 \text{ cm}$  à  $T_0 = 25 \text{ °C}$
- d'un circuit d'alarme enclenché par un bouton poussoir m.

Pour éviter de travailler à des températures élevées on choisie une lame qui présente une dilatation à partir d'une certaine température donnée et se déforme suivant une courbure comme il est présenté en traits interrompu (voir Figure 5.2) jusqu'à appuyer sur le bouton poussoir m qui fermera le circuit d'alarme et donc on aura un enclenchement de la sonnerie. La longueur de la lame varie donc en fonction de la température : on la notera  $L(T)$ .

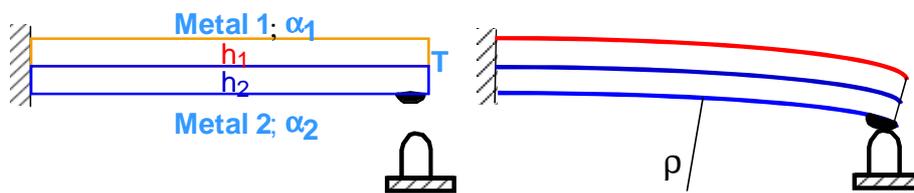


Figure 5.2. Principe de fonctionnement d'une bilame métallique

Le problème est de déterminer l'expression de la distance  $e$  qui elle aussi devient fonction de la température : on la notera  $e(T)$ .

On se servira du modèle équivalent; qui schématise le cas où la lame touche le bouton poussoir; pour déterminer la distance  $e(T)$

Données :  $\rho(T)$  : rayon de courbure de la lame, avec  $\rho(T) : \rho(T) = \frac{A}{(T - T_0)}$

Avec  $A = \text{constante (m}^\circ\text{C)}$

$L(T) = \alpha \rho(T)$

1. Montrer que  $e(T) = \rho(T) \left( 1 - \cos \frac{L(T)}{\rho(T)} \right)$
2. Déterminer l'incertitude absolue sur  $e(T)$

**5.2. RESISTANCE TEMPERATURE DETECTOR (PT100)**

✱ **EXERCICE 4**

Un capteur RTD, fabriqué à partir de la platine, subit une variation de température. Le coefficient de résistivité est  $\gamma_1 = 0.003902/^\circ\text{C}$ .  $\gamma_2$  est supposé négligeable. Si la résistance du capteur est de  $100 \Omega$  à  $0^\circ\text{C}$ , déterminer la valeur de la résistance aux températures suivantes :

- a)  $-240^\circ\text{C}$     b)  $-120^\circ\text{C}$     c)  $90^\circ\text{C}$     d)  $260^\circ\text{C}$     e)  $600^\circ\text{C}$     f)  $900^\circ\text{C}$

✱ **EXERCISE 5**

Les relations entre résistance électrique et température, respectivement pour des capteurs en nickel et platine, sont données par:

$$r(\theta) = R_0 ( 1 + 5.4916 \cdot 10^{-3} \theta + 6.6666 \cdot 10^{-6} \theta^2 ) \quad (5.3)$$

$$R(\theta) = R_0 ( 1 + 3.9080 \cdot 10^{-3} \theta - 5.8019 \cdot 10^{-7} \theta^2 ) \quad (5.4)$$

Où  $\theta$  est en degré Celsius et  $R_0 = 100 \Omega$

1. Vous voulez mesurer une température avoisinant les  $50^\circ\text{C}$ , quel capteur utiliseriez-vous?
2. Si la plus petite résistance, qui peut être mesurée est de  $0,1 \Omega$ , déterminer la résolution du capteur choisi à  $50^\circ\text{C}$ .

▪ **EXERCICE 6 ☺**

On veut mesurer la stratification thermique dans un réservoir de stockage d'eau chaude. Pour cela, on place 10 sondes pour la mesure de la température de type PT100 espacées de 15 cm.

Pour une PT100, la caractéristique telle que donnée par le fabricant est la suivante :

$$R = R_0 \times [1 + 0,00385 \times T] \quad (5.5)$$

R est la résistance en Ohm

T est la température en  $^\circ\text{C}$

$R_0$  est la valeur de la résistance à  $0^\circ\text{C}$ . Sa valeur est 100 Ohms

A un instant t, on mesure les températures dans les différentes couches du ballon. On obtient le tableau suivant :

Tableau 5.1. Résultats de mesure de température dans les différentes couches

Couche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resistanc	107,	107,0	108,4	111,1	113,0	117,3	120,4	121,5	122,3	123,

e ( $\Omega$ )	7	9	7	7	9	3	1	6	3	1
----------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1. Chercher les valeurs de la température au niveau de chaque sonde
2. Tracer la courbe  $T = f(Z)$

On remarque que la température représente une irrégularité au niveau de la sonde N°5. On procède alors à son étalonnage, et on obtient le tableau suivant

Tableau 5.2. Etalonnage de la sonde N°5

T[°C]	20	30	40	50	60
R ( $\Omega$ )	106,15	110,25	114,30	118,35	122,45

3. Cherchez les caractéristiques de cette sonde. Qu'est ce que vous pouvez en déduire ?
4. Lors d'un test, on doit chauffer et bien mélanger l'eau au ballon jusqu'à 60°C. Le mélange doit être effectué jusqu'à ce que la différence entre la température de la couche N°1 et celle de la couche N°10 soit inférieure à 0.5°C. Quelle doit être la résolution de l'ohm mètre pour obtenir une telle précision ?

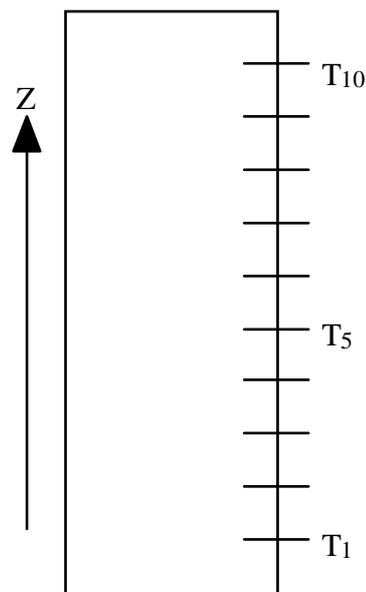


Figure 5.3.Placement des capteurs dans le ballon

### 5.3. THERMISTANCE

#### ✱ EXERCICE 7

Si  $\beta = 4350 \text{ K}$  et  $R_0 = 3000 \Omega$  à  $T_0 = 298 \text{ K}$ , déterminer la résistance de la thermistance pour les températures suivantes :

- a)  $-80^\circ\text{C}$       b)  $-40^\circ\text{C}$       c)  $0^\circ\text{C}$       d)  $50^\circ\text{C}$       e)  $75^\circ\text{C}$       f)  $150^\circ\text{C}$

#### ✱ EXERCICE 8

La thermistance décrite en exercice 7 (est connectée à un circuit potentiométrique à courant continu constant.

1. Si le courant est de  $10 \text{ mA}$ , préparer un graphe montrant la tension de sortie  $V_0$  quand la température varie de  $-50^\circ\text{C}$  à  $300^\circ\text{C}$ .
2. Utiliser une thermistance ayant la même valeur  $\beta$  mais  $R_0 = 110 \Omega$  à  $25^\circ\text{C}$ .

#### ▪ EXERCICE 9

Recommander un capteur entre le PT100 ( $\gamma_1 = 0.003902/^\circ\text{C}$ ,  $R_0 = 100 \Omega$  à  $0^\circ\text{C}$ ) et la thermistance ( $\beta = 4350 \text{ K}$ ;  $R_0 = 3000 \Omega$  à  $T_0 = 298 \text{ K}$ ), pour être utilisé afin de contrôler le processus quand la température est :

- a)  $600^\circ\text{C}$       b)  $400^\circ\text{C}$       c)  $90^\circ\text{C}$       d)  $-100^\circ\text{C}$       e)  $-240^\circ\text{C}$

#### ✱ EXERCICE 10 ☺

Pour une valeur  $T \text{ [K]}$  de la température, la résistance électrique d'une thermistance est donnée par :

$$R = R_0 \times \exp \left[ \beta \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (5.6)$$

Où

$R_0$  est la résistance à la température  $T_0$

$\beta$  est supposée constante dans le domaine de température utilisé.

On donne :

$R_0 = 5000 \Omega$  à  $T_0 = 300 \text{ K}$

$\beta = 3000 \text{ K}$

1. Si la valeur de la résistance mesurée est :  $R = (1000 \pm 5) \Omega$ , calculez la température correspondante  $T$  et son incertitude  $\Delta T$ .

2. En supposant que la plus petite résistance qu'on peut mesurer avec le Pont de Wheatstone utilisé est de  $10 \Omega$ , déterminez la résolution à  $T = 320K$  et à  $T = 600K$  de ce thermomètre à thermistance. Commentez ces résultats.

## 5.4. THERMOCOUPLES

### ✦ EXERCICE 11

Un Voltmètre Digital (DVM) est utilisé pour mesurer la tension de sortie  $V_0$  d'un thermocouple Cuivre-Constantan, comme montré dans la figure 5.5. Déterminer la tension de sortie  $V$  Indiqué par le voltmètre DVM.

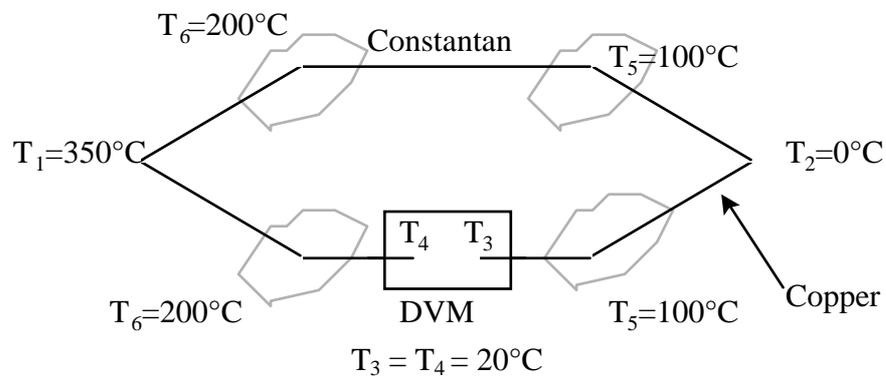


Figure 5.5. Mesure de la tension issue d'un thermocouple par un DVM

### ✦ EXERCICE 12

Pour un thermocouple, quand la jonction froide est maintenue à  $0^\circ\text{C}$ , les données d'étalonnage sont données dans le tableau suivant :

Tableau 5.3. Données de mesure de température par un thermocouple

$\theta(^{\circ}\text{C})$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E(\mu\text{V})$	0	397	798	1203	1611	2020	2436	2850	3266	3681	4095

1. Dans ce domaine la courbe d'étalonnage est supposée être une droite. Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer l'équation  $E = f(\theta)$
2. Pour  $E = 2020 \mu\text{V}$ , déterminer l'erreur commise sur la température si la courbe est utilisée.
3. Ce thermocouple est utilisé avec la jonction froide a  $\theta_s = 20^\circ\text{C}$ . Déterminer, en utilisant le tableau convenable, la température si la f.e.m  $E = 2052 \mu\text{V}$ .

### ✦ EXERCICE 13 ☺

Soit une enceinte qui est à maintenir à température constante  $T_u = 20^\circ\text{C}$ , au milieu d'un environnement à  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ , par chauffage à partir d'une source thermique à température  $T_a$ . Pour mesurer ces températures, 3 thermocouples Chromel-Constantin sont utilisés. Les jonctions de références de ces thermocouples sont placées à la température ambiante  $T_0$ .

1. Expliquer le principe de fonctionnement d'un thermocouple,
2. Quels sont les autres instruments de mesure de température que vous connaissez?
3. Un voltmètre digital est branché aux bornes du thermocouple mesurant la température  $T_u$ ; Quelle devrait être la tension affichée par ce voltmètre?
4. La valeur affichée par le voltmètre est en fait 0.652 mV. Que remarquez-vous? Interpréter ce résultat,
5. Le voltmètre branché au thermocouple mesurant  $T_a$  affiche une tension de 6.112 mV, Quelle est la température de la source thermique?

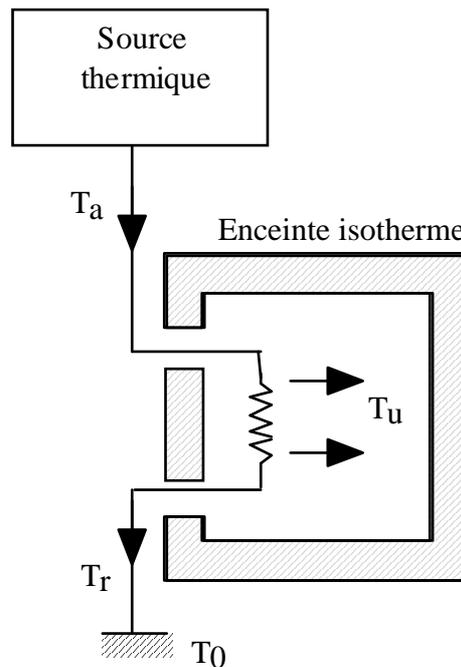


Figure 5.6 : Chauffage d'une enceinte isotherme

✠ EXERCICE 14 ☺

1. Expliquer le principe de fonctionnement d'un thermocouple
2. Quels sont les autres instruments de mesure de température que vous connaissez?

- Un millivoltmètre digital est branché aux bornes d'un thermocouple "Alumel-Constantan" dont la jonction chaude est placée dans de l'eau en ébullition à la pression atmosphérique et la jonction froide à la température ambiante ( $T_{amb} = 20^{\circ}\text{C}$ ). Quelle doit être la tension affichée par ce millivoltmètre?
- La valeur affichée par le voltmètre est en fait 2.3 mV. Que remarquez-vous? Interpréter ce résultat

### ✦ EXERCISE 15

Un thermocouple de type K (chromel-Alumel) est utilisé pour mesurer la température d'un four. La jonction de mesure est à l'intérieur du four; la jonction de référence est à la température ambiante. La température ambiante est mesurée en utilisant un thermomètre à mercure.

- La valeur obtenue pour la température ambiante est  $(18.0 \pm 0.5)^{\circ}\text{C}$ . La mesure à partir du voltmètre donne 9.19 mV. Quelle est la valeur de la température du four?
- La résolution du voltmètre est 0.01 mV, est ce que ça a un sens de changer le thermomètre à mercure par un deuxième ayant une résolution de  $0.1^{\circ}\text{C}$ ? Qu'elle est la résolution du système de mesure à la température du four?
- Calculer l'incertitude obtenue sur la température du four.

### ▪ EXERCICE 16

On veut mesurer la stratification thermique dans un bassin solaire, rempli d'eau très salée. Pour cela, on place 5 thermocouples **Fer/Constantan** espacés de 20 cm en profondeur. A un instant  $t$ , on mesure les forces électromotrices ( $e$ ) données par les 5 thermocouples ; on obtient les résultats suivants :

Table 5.5. Températures mesurées par les 5 thermocouples

N°Thermocouple	1	2	3	4	5
f.e.m. $e$ (mV)	1,019	1,536	2,058	2,585	3,115

- Chercher les valeurs des températures en utilisant la table du thermocouple Fer/Constantan sachant que les soudures de références de thermocouples sont placées à la glace fondante
- Quelle f.e.m ( $e$ ) donnerait un thermocouple **Fer/Constantan** si sa soudure de référence était à la température  $T_1 = 30^{\circ}\text{C}$  et sa soudure de mesure à  $T_2 = 60^{\circ}\text{C}$ .
- En supposant que la courbe d'étalonnage des thermocouples est une droite dans ce domaine de température, utiliser la méthode de moindre carré pour déterminer les caractéristiques de cette droite.
- Déterminer, à 3 chiffres significatifs près, l'erreur commise sur la mesure de température correspondante à la f.e.m.  $e = 1,797$  mV en faisant cette

approximation.

5. Quelle doit être la résolution, à un chiffre significatif prêt, du voltmètre à utiliser si la résolution voulue sur la mesure de température est de 3°C ?
6. Ces thermocouples sont maintenant utilisés avec une soudure de référence à 20°C, déterminer, en utilisant la table, la nouvelle température de l'un de ces thermocouples si l'indication de sa f.e.m. était à  $e = 2,567$  mV.
7. On veut faire un thermocouple **Fer/Métal M**. Déterminer la sensibilité de ce thermocouple, sachant que celle du thermocouple M/Constantan est égale à 25,29µV/°C

▪ **EXERCICE 17**

La distribution de la température d'une plaque chauffante régulée est mesurée par 6 thermocouples fer/constantan pour lesquels les soudures de mesures sont collées à différents points de la surface à étudier. Les soudures de référence de ces thermocouples sont placées à la température ambiante (25°C). Les tensions de sorties des différents thermocouples sont résumées dans le tableau suivant:

Table 5.6. Résultats de mesure par les cinq thermocouples

N°Thermocouple	1	2	3	4	5	6
Tension (mV)	3,828	3,991	4,154	3,991	3,773	3,882

1. En utilisant la table du thermocouple fer/constantan, déterminer les températures correspondant aux différents thermocouples,
2. Calculer la température moyenne, l'écart type sur la mesure de la température de la plaque chauffante et l'incertitude  $\Delta T$  à un chiffre significatif,
3. Exprimer correctement le résultat de mesure de la température,
4. Pour une tension mesurée de 5,350 mV, il n'existe pas une valeur entière de la température indiquée sur la table, en tenant compte de l'incertitude introduite par le système de mesure ( $\Delta T = 3^\circ\text{C}$ ), faut-il faire une interpolation linéaire? Justifier votre réponse.

**5.5. PYROMETRES OPTIQUES**

✦ **EXERCICE 18**

La radiation totale à partir d'un corps gris est donnée par la relation suivante :

$$W_\lambda (T) = \epsilon(\lambda, T) W_{\lambda,B}(T) \tag{5.7}$$

Ou  $\epsilon(\lambda, T)$  est l'émissivité totale et  $W_{\lambda,B}(T)$  est la radiation totale d'un corps noir de même surface et à la même température.

En général, le pyromètre optique utilise une fraction du spectre d'émission centrée sur la longueur d'onde  $\lambda_0$  avec une étendue  $\Delta\lambda$ . Un capteur photoélectrique converti cette radiation a un signal électrique,  $S_{el}$  donnée par:

$$S_{el} = \int_{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} K(\lambda) \times S_d(\lambda) \times W_\lambda(T) \cdot d\lambda \quad (5.8)$$

Où  $K(\lambda)$  est un facteur géométrique et  $S_d(\lambda)$  est l'émissivité du capteur photoélectrique.

1. En utilisant la loi de Planck :  $W_{\lambda,B} = \frac{C_1}{\lambda^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$  et en supposant que  $\lambda =$

$$\lambda_0 \text{ et } \frac{C_2}{\lambda T} \gg 1 \text{ montrer que : } S_{el} = K(\lambda_0) \times S_d(\lambda_0) \times \varepsilon(\lambda_0, T) \times \frac{C_1 \Delta\lambda}{\lambda_0^3} \times \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda_0 T}\right)$$

2. Si le pyromètre optique est étalonné par rapport a un corps noir, montrer que le signal électrique  $S_{el}$ , correspond dans le cas d'un corps gris a une température T donnée par:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_B} + \frac{\lambda_0}{C_2} \times \text{Ln}\varepsilon(\lambda_0)} \quad (5.9)$$

Où  $T_B$  est la température du corps noir.

3. Si la plus petite température lu par le pyromètre optique est  $\Delta T_B = 5$  K, calculer la résolution du pyromètre pour un corps gris a  $T = 1273$  K, quand  $\lambda_0 = 0.66$  mm,  $\varepsilon(\lambda_0) = 0.63$  et  $C_2 = 1.4388 \cdot 10^4$   $\mu\text{m K}$
4. Si le pyromètre utilise deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec la même **largeur** spectrale  $\Delta\lambda$  et quand  $S_d(\lambda_1) = S_d(\lambda_2)$   $K(\lambda_1) = K(\lambda_2)$  et  $\varepsilon(\lambda_1) = \varepsilon(\lambda_2)$ 
  - a. Donner les signaux électriques  $S_{el,1}$  and  $S_{el,2}$  correspondant respectivement à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$
  - b. Calculer le ratio  $r = \frac{S_{el,1}}{S_{el,2}}$  et donner l'intérêt principal de ce type de pyromètre optique.

## 6 ● REVISION : QUESTIONS DE COURS

---

### ✦ EXERCICE 1 ☺

1. Rappeler les unités de base constituant le système MKSA (indiquer les grandeurs physiques correspondantes).
2. Préciser le principe de fonctionnement d'un transducteur dans un instrument de mesure électronique, donner un exemple.
3. Quelle est la différence entre les erreurs aléatoires et les erreurs systématiques? Donner un exemple.
4. Qu'est ce que la médiane d'une population statistique ?

### ✦ EXERCICE 2 ☺

1. Donnez une figure illustrant les différents composants d'un instrument électronique.
2. Qu'elle est la différence entre une PT100 et une Thermistance?
3. Expliquez la différence entre une caractéristique statique et une caractéristique dynamique d'un instrument. Donnez quelques exemples.
4. Définissez un instrument de premier ordre.

### ✦ EXERCICE 3

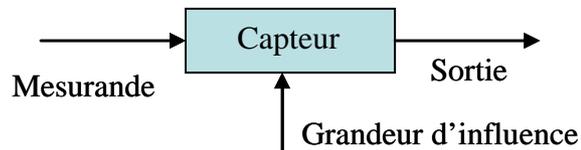


Figure 6.1. Fonctionnement d'un capteur

1. Quelle est la fonction réalisée par ce capteur?
2. Qu'appelle-t-on mesurande?
3.
  - a. Que représente la grandeur d'influence?
  - b. Comment doit être sa contribution au signal de sortie?
  - c. Peut-on utiliser un capteur pour mesurer une grandeur d'influence? si oui donner un exemple

### ✦ EXERCICE 4 ☺

Préciser si les erreurs suivantes sont systématiques ou aléatoires :

- Vieillessement de l'instrument,

- Erreur sur la sensibilité de l'instrument,
- Erreur de lectures,
- Décalage du Zéro,
- Signaux parasites autour du capteur,

### ✱ EXERCICE 5 ☺

1. Donner une définition du circuit de conditionnement (dans un instrument électronique) et donner un exemple.
2. A quelles conditions peut-on appliquer la loi de probabilité de Gauss à un ensemble de N valeurs de mesure d'une grandeur X ?
3. Montrez que dans la méthode des moindres carrés, les coefficients m et b permettant de relier par une droite  $Y_i = mx_i + b$  des points dispersés, ont pour expression :

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} \quad (6.1)$$

et

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} \quad (6.2)$$

### ✱ EXERCICE 6

1. Définissez la fidélité et la justesse d'un appareil de mesure. Expliquer la différence entre ces deux paramètres
2. Qu'elle est la différence entre un transducteur actif et un transducteur passif? Donner quelques exemples.
3. Définissez un système d'ordre deux, donner un exemple.
4. Qu'elle est la différence entre un système de mesure d'ordre un et un d'ordre deux?

### ✱ EXERCICE 7

1. Définissez la résolution d'un instrument de mesure. Est-ce une caractéristique statique ou dynamique?
2. Quels sont les principes physiques utilisés pour la mesure de température?
3. Sur quels facteurs doit-on se baser pour choisir d'une manière convenable un capteur de température, illustrez par un exemple ?

## 7 ● PROBLEMES DE SYNTHÈSE

### ▪ PROBLEME 1

La communication entre le port d'un infrarouge d'un ordinateur et celui d'une imprimante est schématisée par la figure suivante:

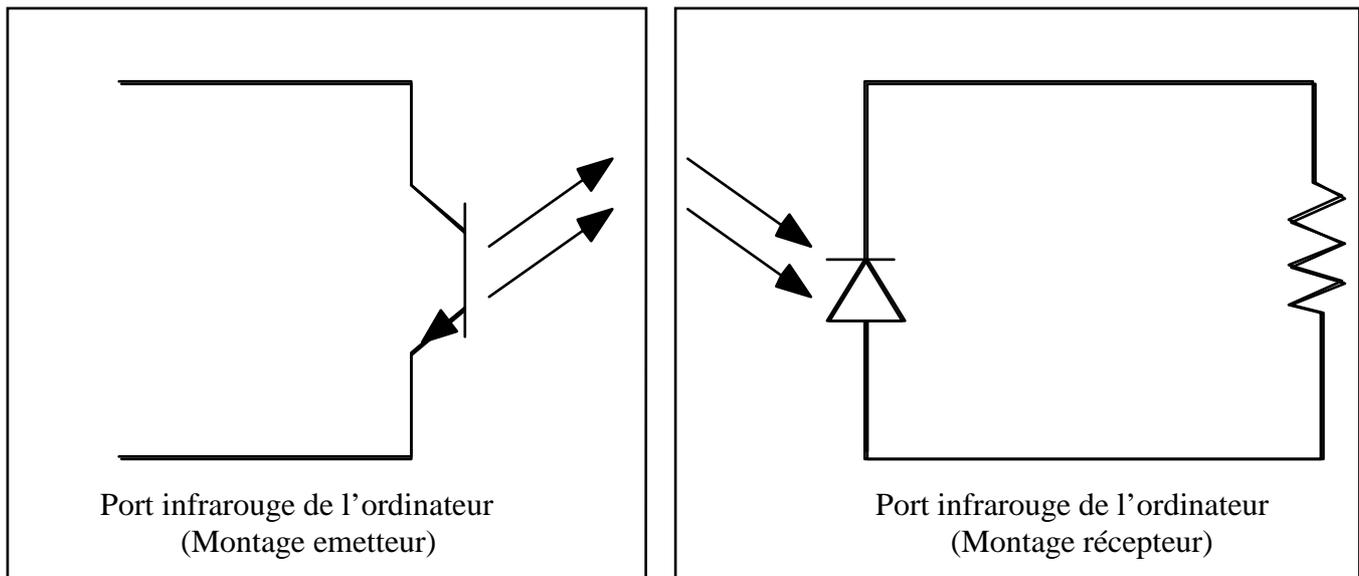


Figure 7.1. Schéma de communication entre le port d'un infrarouge d'un ordinateur et celui d'une imprimante

Un tel système d'émission-réception est constitué de:

- un circuit émetteur : composé essentiellement d'un phototransistor
- un circuit récepteur : composé d'une photodiode D et une résistance R.

La photodiode se comporte comme un générateur de photo-courant  $I = S_d \Phi$  où  $S_d$  est la sensibilité propre de la photodiode exprimée en  $\mu\text{A} / \mu\text{W}$  et  $\Phi$  est le flux reçu.

**Données :**  $R = 70 \Omega$ ;  $r_d = 15 \text{ } 10^{10} \Omega$ ;  $C_d = 5 \text{ } 10^{-9} \text{F}$  (avec  $r_d$  est résistance interne de la photodiode,  $C_d$  correspond à la capacité interne de la photodiode).

#### Partie 1. Etude électrique

1. a. Quelle est la grandeur physique mesurée par le capteur optique ?
- b. Quelle est la grandeur électrique fournie par le capteur ?
- c. Quel est le type du capteur utilisé? Justifier.
2. Donner le schéma électrique équivalent du circuit récepteur (ne pas représenter la capacité  $C_p$  des effets parasites).

3. Pour un flux  $\Phi$  incident :
  - a. Etablir l'équation différentielle du système (photodiode résistance). Déduire l'ordre du système.
  - b. déterminer la constante du temps (tenir compte des approximations).
4. Pour un flux sinusoïdal  $F(t)=F_m \cos(\omega t)$  la forme de la tension aux bornes de la résistance est  $V(t) = V_m \cos(\omega t + f)$ .  
Etablir les expressions de  $V_m$  et  $f$ . Tracer les diagrammes de réponse en fréquence.

## Partie 2. Etude Statistique

Lors de l'envoi d'une séquence de 8 bits tous à 1 (11111111) de l'ordinateur vers l'imprimante, on mesure le courant circulant dans la résistance R correspondant à chaque bit.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

*Tableau 7.1. Résultats de mesure de courant*

I(mA)	59.98	59.98	60.02	60.00	60.04	60.00	59.98	60.00
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1. Ranger les valeurs dans 3 classes et calculer les fréquences relatives de chacune.
2. Calculer la valeur moyenne du photo-courant et de son écart-type. En déduire une meilleure estimation de la vraie valeur du photo-courant et de l'erreur. Mettre le résultat sous la forme  $(I = I \pm \Delta I)$ .
3. En supposant que la sensibilité  $S_d$  est constante et égale à  $0.3 \mu A / \mu W$ . Estimer le flux reçu par la photodiode et son erreur : Mettre le résultat sous la forme  $\Phi = \Phi \pm \Delta \Phi$ .

✦ PROBLEME 2

Deux réservoirs communicants sont remplis avec un liquide. Le premier est soumis à une pression  $P_1$  et le deuxième subit une pression  $P_2$  (Voir Figure 7.2)

1. Démontrer que la différence de niveau de liquide ( $2 \Delta h$ ) est reliée à la différence de pression. Donner l'expression de  $\Delta P$  comme une fonction de  $\Delta h$ .

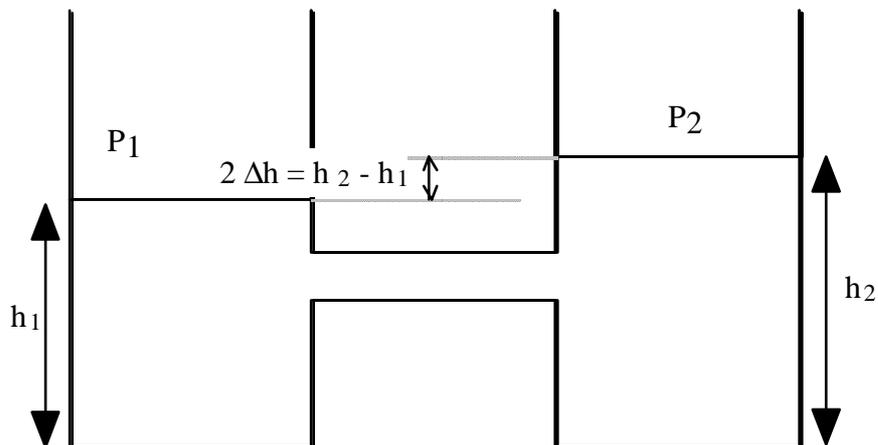


Figure 7.2. Résevoirs communicants

2. Dans chaque réservoir, on immerge des capteurs capacitifs sous forme de cylindres plats co-centriques. La longueur du capteur est  $L$  (Figure 7.3).

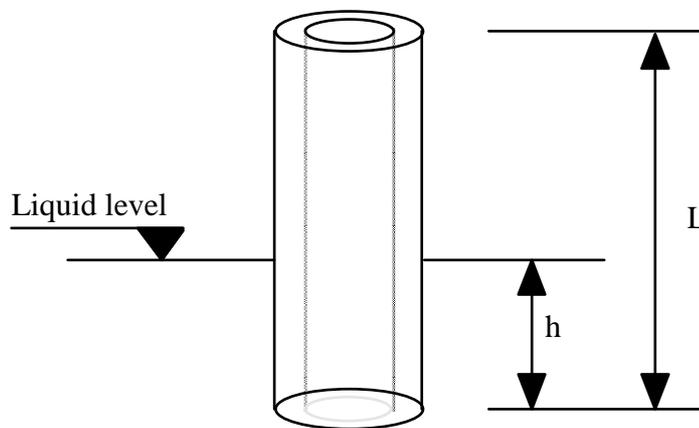


Figure 7.3. Mesure de niveau  $L$

Aux conditions initiales  $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$  et  $h_1 = h_2 = h_0 = L/2$ . Dans ces conditions, les deux capteurs ont les capacités :

$$C_1 = C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r h_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{2\pi\epsilon_0(L - h_0)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (7.1)$$

$h_0$  : est le niveau du liquide dans le réservoir aux conditions initiales ( $h_0 = L/2$ ),  
 $\epsilon_0$  : la permittivité de la surface libre entre les deux plaques capacitives,  
 $\epsilon_r$  : la permittivité relative du liquide,  
 $a, b$  : respectivement les rayons des cylindres intérieur et extérieur.

Ainsi, une pression  $P_1$  est appliquée sur le réservoir 1. Les niveaux des liquides deviennent :

$h_1 = h_0 - \Delta h$  dans le réservoir 1

et  $h_2 = h_0 + \Delta h$  dans le réservoir 2

Démontrer que  $(C_1 - C_2)$  est proportionnel à  $(h_2 - h_1)$

3. Les deux capacités sont connectées aux bornes d'un Pont Sauty comme montre dans la figure suivante:

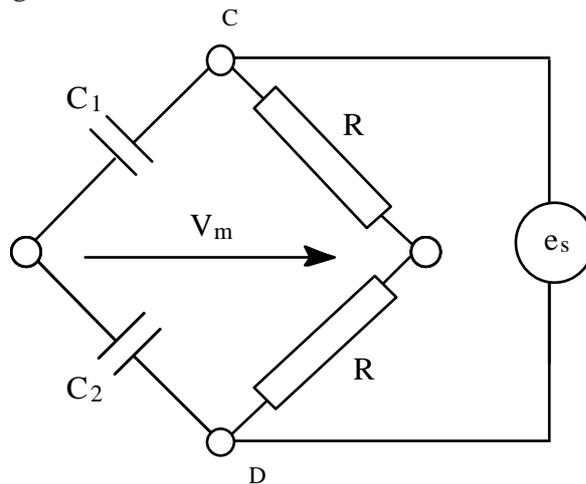


Figure 7.4. Montage Pont Sauty

- Démontrer que  $V_m$  est égale à Zéro aux conditions initiales (le pont est équilibré).
  - Démontrer que lorsque  $P_1$  est différent de  $P_2$ ,  $V_m$  est proportionnelle à  $(C_1 - C_2)$  et par la suite à  $(h_2 - h_1)$ ; Donner la relation entre  $V_m$  et  $(h_2 - h_1)$
- Est ce que ce système peut être utilisé pour mesurer la différence de pression ( $P_1 - P_2$ ) entre les deux réservoirs? Donner une relation entre  $(P_1 - P_2)$  et  $V_m$ .
  - Les deux capacités ont une longueur  $L = 1$  m, la permittivité relative du liquide est  $\epsilon_r = 4$ . L'alimentation en puissance du pont est  $\epsilon_s = 6$  Volts.
  - Si le Voltmètre mesurant la tension de déséquilibre du pont  $V_m$  ait une résolution de 1 mV, quelle peut être la résolution du déplacement de liquide  $(h_2 - h_1)$ ?

✱ PROBLEME 3 : PHOTODIODE ☺

On utilise une photodiode comme capteur de mesure de flux lumineux. La diode se comporte comme un générateur de courant  $i = S_d \cdot \Phi$  où  $\Phi$  est le flux lumineux incident à mesurer et  $S_d$  la sensibilité propre de la diode en A/W (indépendante de la fréquence de  $\Phi$ ). En fait, la grandeur électrique de sortie du montage est la tension  $v$  aux bornes de la résistance  $R_m$  (voir figure 7.5.a) à la place du courant  $i$ . Le schéma électrique équivalent du montage peut être représenté par celui de la figure 7.5.b, où  $C$  est la capacité de la jonction de la diode polarisée en inverse.

1. Quels sont les signaux d'entrée  $m$  et de sortie  $S$  de ce capteur de mesure du flux lumineux ?
2. Démontrer, à partir de l'équation du circuit électrique équivalent (figure 7.5.b), que l'expression de l'amplitude  $I_1$  du courant électrique peut s'écrire :

$$I_1 = j \times \omega \times C \times V_1 \times e^{j\varphi} + \frac{V_1}{R_m} \times e^{j\varphi} \quad (7.2)$$

On donne le flux incident modulé  $\Phi(t) = \Phi_1 \times e^{j\omega t}$ ; le courant  $i(t) = I_1 \times \Phi_1 \times e^{j\omega t}$ ;  $I_1 = S_d \cdot \Phi_1$  et la tension de sortie  $V(t) = V_1 \times e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

3. En supposant le système de premier ordre de signal de sortie  $S$  et d'entrée  $m$ , de la forme :

$$A \times \frac{dS}{dt} + B \times S = m, \text{ donner la fréquence de coupure du circuit } f_c = (B/2\pi A).$$

4. Montrer que  $V_1 = \frac{R_m \times S \times d \times \Phi_1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}$  et  $\varphi = -\text{Arctg}(f/f_c)$ .

5. Calculer la sensibilité de cette photodiode  $s(f)$  et sa constante de temps  $\tau = 1/(2\pi f_c)$ .

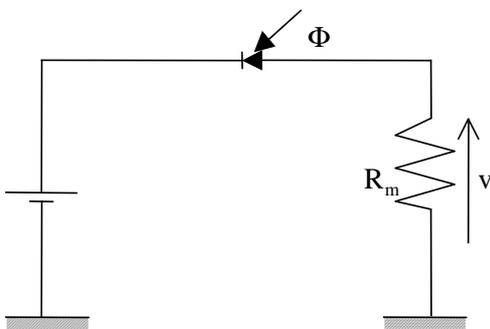


Figure a

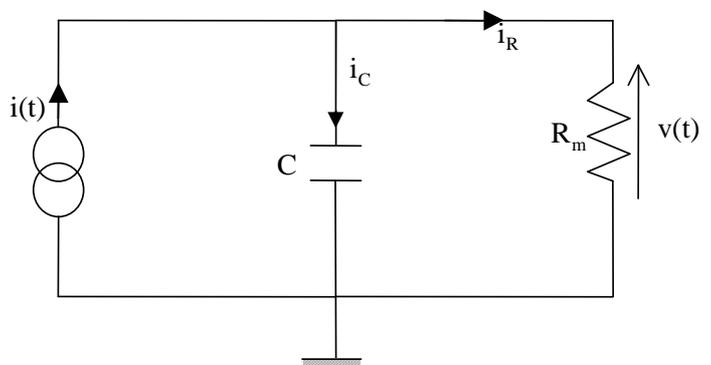


Figure b

✠ PROBLEME 4 ☺

**Partie 1: Mesure de Niveau**

Un capteur capacitif de forme cylindrique est utilisé pour mesurer le niveau d'un liquide dans un réservoir. Ce condensateur est constitué de deux cylindres concentriques séparés par de l'air. Le cylindre intérieur a un diamètre  $d_1$  et le cylindre extérieur un diamètre  $d_2$  (voir la figure 7.6). La capacité de ce condensateur dépend du fluide qui se trouve dans le réservoir ( $\epsilon_1$  est la permittivité relative de ce liquide). Si le réservoir est partiellement rempli par ce liquide, la valeur de la capacité sera intermédiaire entre celle d'un condensateur dont le diélectrique est l'air, et celle d'un condensateur dont le diélectrique est le liquide. La mesure de la valeur de la capacité nous permettra de déduire le niveau du liquide dans le réservoir.

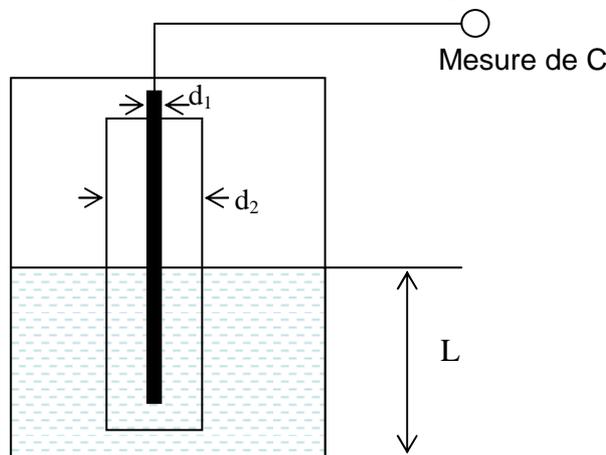


Figure 7.6. Principe de mesure de la capacité

La capacité  $C$  mesurée dépend de la permittivité relative du liquide  $\epsilon_1$ . Le niveau du liquide est indiqué par :

$$L = \frac{\ln \frac{d_2}{d_1} \times C}{2 \times \pi \times \epsilon_0 \times \epsilon_1} \quad (7.3)$$

$\epsilon_0$  est la constante diélectrique du vide ( $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )

$d_2 = 2,5 \text{ cm}$

$d_1 = 1 \text{ cm}$

- 1.1. Quels sont les signaux d'entrée et de sortie de la sonde?
- 1.2. Déterminez l'expression de la sensibilité du capteur,
- 1.3. Le capteur est-il linéaire? Justifiez votre réponse.

Un calibrage statique de la sonde donne les résultats suivants (voir le tableau 7.2) :

Tableau 7.2. Calibration statique du capteur de niveau

Capacité C (pF)	25	30	35	40	45	50	55	60
Niveau du liquide (cm)	34	41,2	47,5	54,5	61,7	68,1	75,1	81,7

- 1.4. Tracez la courbe  $C = f(L)$
- 1.5. Déterminez, en utilisant la méthode des moindres carrés, la permittivité relative du liquide  $\epsilon_1$ .
- 1.6. En considérant les erreurs relatives :
  - sur les diamètres  $d_1$  et  $d_2 = 2\%$ ,
  - sur la capacité = 5% et
  - sur la permittivité relative du liquide  $\epsilon_1 = 3\%$ ,
 Déterminez l'erreur sur le niveau du liquide  $\Delta L$ , si le niveau de liquide est de 68 cm.

## Partie 2 : Mesure de température

Un thermocouple chromel-Alumel est utilisé pour mesurer la température d'un liquide. Sa jonction de référence est placée à la température ambiante. Une PT100 faite en Platine est placée près de la jonction de référence (voir figure 7.7).

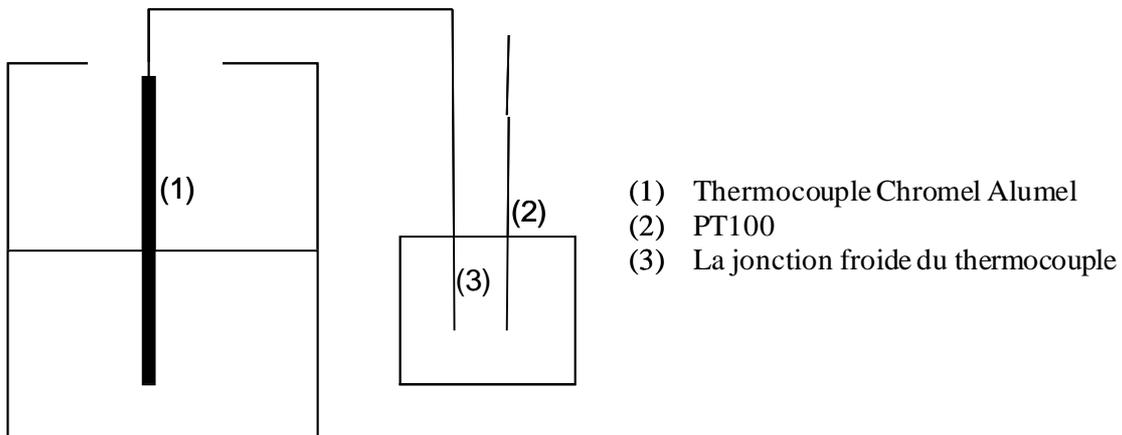


Figure 7.7. Principe de mesure avec le thermocouple

- 2.1. Expliquez pourquoi la platine est le matériau le plus utilisé dans la fabrication des capteurs résistifs,
- 2.2. Le coefficient de résistivité du capteur PT 100 est  $\alpha = 0.4 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $R(0^\circ\text{C}) = 100 \text{ } \Omega$ . Pendant l'expérience, la résistance est mesurée par un pont de Wheatstone (WB). Si le WB indique  $200 \text{ } \Omega$  déduisez la température mesurée par le capteur en tenant compte du phénomène d'auto-chauffage.
- 2.3. Si la plus petite valeur qui peut être mesurée par le WB est  $0.5 \text{ } \Omega$  calculez la résolution du capteur PT100 à  $50^\circ\text{C}$ .
- 2.4. La tension indiquée par le thermocouple est  $3.456 \text{ mV}$ . Déterminez la

température du liquide.

✱ **PROBLEME 5 : MESURE D'HUMIDITE**

Un transducteur est composé d'un capteur résistif d'humidité « HOS201 » dont la résistance est  $R$ , installé en parallèle avec une résistance  $R'$  (voir figure 7.8).

La valeur de la résistance du capteur d'humidité HOS 201 a pour équation (pour  $h \geq 50\%$ ) :

$$R = A \cdot e^{-B \times h} \quad (7.3)$$

Avec :

$$A = 6,92 \cdot 10^{12} \text{ uSI},$$

$$B = 21$$

$h$  : l'humidité relative (%)

La valeur de la résistance  $R'$  est égale à :  $R' = 1 \text{ M}\Omega$ .

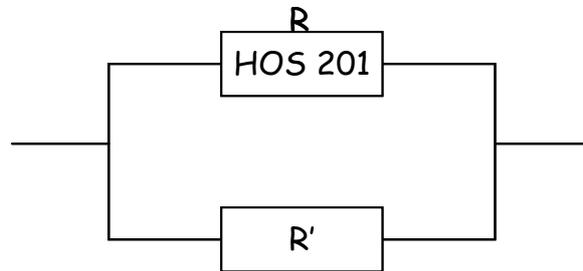


Figure 7.8 : Schéma du capteur d'humidité

**Remarque** : 50 % d'humidité correspond à  $h = 0,50$ .

1. En quelles unités doit on exprimer  $A$  ?
2. Quelle est l'expression de la résistance  $R_1$ , obtenue par la mise en parallèle de la résistance  $R'$  et du capteur d'humidité HOS 201 ?
3. La résistance  $R_1$  est maintenant mise dans un Pont de Wheatstone (Voir Figure 7.9). Les résistances  $R_2$  et  $R_4$  sont égales et valent  $10 \text{ K}\Omega$ .

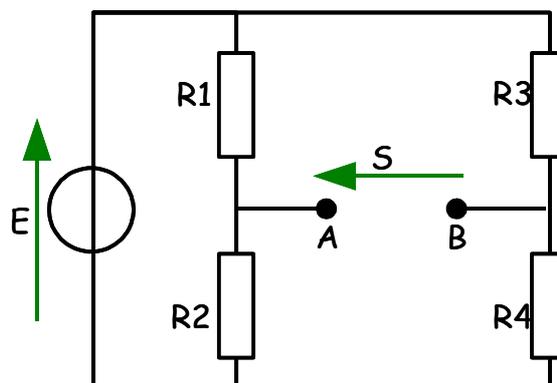


Figure 7.9 : Mise en pont de la résistance  $R_1$

Quelle est l'expression de la tension entre A et B, notée  $S$ , en fonction de  $R_1$ ,

$R_2, R_3, R_4$  et  $E$  ? Démontrer qu'on peut la mettre sous la forme :

$$S = E \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

4. Quelle est la condition d'équilibre de ce pont en fonction des quatre résistances ?
5. Quelle est la résistance du capteur, notée  $R_{50}$  à 50 % d'humidité ?
6. En déduire la valeur de la résistance  $R_3$  sachant que le pont est à l'équilibre pour cette condition.
7. Quelle est l'expression de la tension  $S$  ( $S_0, S_{10}$  et  $S_{50}$ ), pour les différentes valeurs de la résistance du capteur  $R_0, R_{10}$  et  $R_{50}$  et  $E$  ?  $R_0, R_{10}$  et  $R_{50}$  étant les valeurs de la résistance du capteur  $R$  à une humidité respective de 0%, 10% et 50%.
8. Pour différentes valeurs de l'humidité relative  $h$ , on a relevé la tension de déséquilibre du pont  $S$  ainsi que la valeur de la résistance  $R_1$ . (Voir tableau 7.3). Utilisez une régression linéaire par la méthode des moindres carrés pour déduire la valeur de  $E$ . Expliciter votre démarche.

Tableau 7.3 : Variation de la résistance  $R_1$  et de la tension  $S$  en fonction de l'humidité

<b>h (%)</b>	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<b><math>R_1</math> (k<math>\Omega</math>)</b>	1000	999,4	99,9	95,8	25,9	5,2
<b>S (mV)</b>	-0,199	-0,198	-0,175	1,422	104,97	2497,8

✳ **PROBLEME 6 : MESURE DE DEBIT ☺**

Pour déterminer le débit volumique  $Q$  (en  $\text{m}^3/\text{s}$ ) d'un fluide dans une conduite on crée un changement de section le long de la conduite, en passant d'une section  $A_1$  à une section  $A_2$  (Voir Figure 7.10). En mesurant la pression  $p_1$  en amont et  $p_2$  en aval, on peut déduire le débit  $Q$  par la relation suivante (dédue de l'équation de Bernoulli) :

$$Q = V_1 A_1 = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (7.4)$$

$(p_1 - p_2)$  : pression différentielle, en Pascal  
 $A_1$  : Surface de la première section en  $\text{m}^2$   
 $A_2$  : Surface de la deuxième section en  $\text{m}^2$   
 $\rho$  : masse volumique du fluide en  $\text{kg}/\text{m}^3$   
 $Q$  : Débit volumique en  $\text{m}^3/\text{s}$

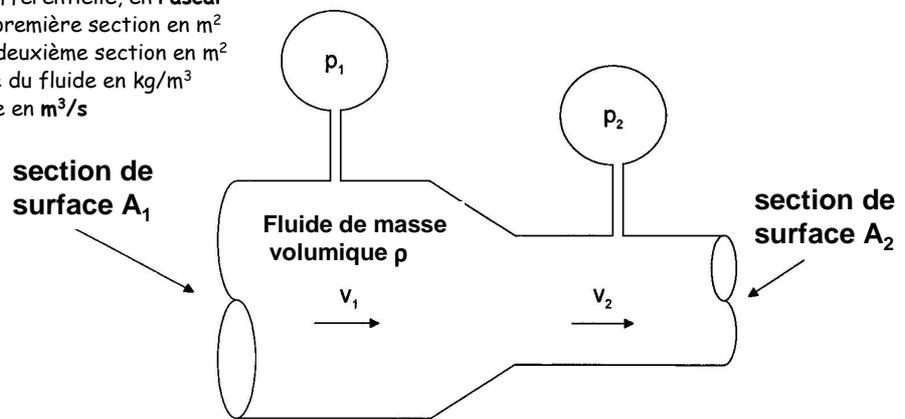


Figure 7.10 : Système de mesure pour le débit

Pendant une séance de travaux pratiques, des étudiants ont voulu vérifier l'équation (7.4). Pour ce faire, ils ont monté un dispositif expérimental similaire à celui de la figure 7.10. Ils ont utilisé deux tubes de section circulaires de diamètres respectifs  $d_1 = 20$  cm et  $d_2 = 18$  cm. Comme fluide, ils ont utilisé de l'eau de masse volumique  $1000$   $\text{kg}/\text{m}^3$ . Deux anémomètres ont été mis en place pour mesurer les pressions  $p_1$  et  $p_2$ . Ils ont installé également un débitmètre en aval de la section présentée sur la figure 7.10 pour réaliser une mesure directe du débit  $Q$  en  $\text{m}^3/\text{h}$ . Grâce à une pompe « à fréquence variable », ils ont pu réaliser des variations de débit de  $0$  à  $1$   $\text{m}^3/\text{h}$ . Les résultats de cette expérience sont illustrés dans le tableau suivant (tableau 7.4):

Tableau 7.4 : Résultats de l'expérience de mesure de débits

$p_1$ (bar)	$p_2$ (bar)	$Q$ (m <sup>3</sup> /h)
2,24	2,11	796,54
2,64	2,45	962,97
3,03	2,78	1104,60
3,32	3,03	1189,69
3,66	3,21	1481,98
3,87	3,36	1577,68
4,02	3,42	1711,24
4,14	3,52	1739,53

1. Etablir, sur un papier millimétré, le graphique  $Q = f(\sqrt{p_1 - p_2})$ ;  
Que remarquez-vous ?
2. On peut exprimer l'équation  $Q = f(\sqrt{p_1 - p_2})$  par une relation de type:  
 $y = m x + b$ ,

Démontrer par la méthode des moindres carrés (régression linéaire), que les paramètres  $m$  et  $b$  peuvent être exprimés par :

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

et

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

3. On appelle  $\rho^2$  le coefficient de corrélation, donné par :

$$\rho^2 = 1 - \frac{n-1}{n-2} \frac{[y^2] - m[xy]}{[y^2]} \quad (7.5)$$

avec :  $[y^2] = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}$  et  $[x.y] = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}$

Quelle est la signification de ce paramètre ?

4. Déterminer l'équation de la courbe ainsi obtenue. Compte tenu du dispositif expérimental utilisé, l'équation 7.4 est-elle vérifiée ?
5. Pendant la première mesure (voir tableau 7.4), les étudiants ont fait une erreur de 1% sur la mesure des pressions  $p_1$  et  $p_2$ . Qu'elle est l'erreur effectuée sur la mesure du débit  $Q$  ? Que pensez-vous de cette mesure ?

6. a. Définissez la résolution d'un système de mesure.  
 b. Si la résolution des capteurs de pression durant la dernière mesure (tableau 7.4) est de 0,01 bars, quelle serait celle du capteur de débit? Commentez le résultat.

✳ **PROBLEME 7 : MESURE DE FORCE**

Considérons l'exemple d'une poutre console qui est soumise à une force  $F$  appliquée à son extrémité. La poutre console (ayant la forme d'une lame parallélépipédique) a une longueur  $L$ , et une section transversale rectangulaire. Sa largeur est  $W$  et sa hauteur est  $h$ . La force  $F$  est appliquée à l'extrémité de la poutre console, conformément à ce qui est montré sur la figure 7.11.

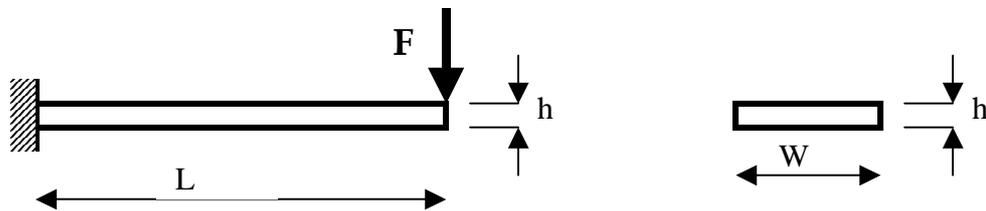


Figure 7.11. Vue schématique de la poutre console

Lorsque la force  $F$  est appliquée, un déplacement du bord libre de la poutre console se produit (voir la figure 7.12). La valeur de ce déplacement est donnée par l'expression :

$$y = \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot F = \frac{4 \cdot L^3}{E \cdot W \cdot h^3} \cdot F \quad (7.6)$$

Où:

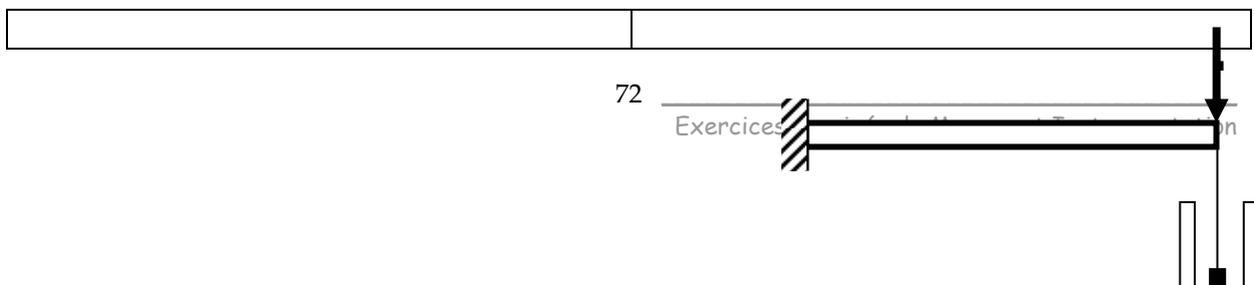
$E$ : Le module d'YOUNG

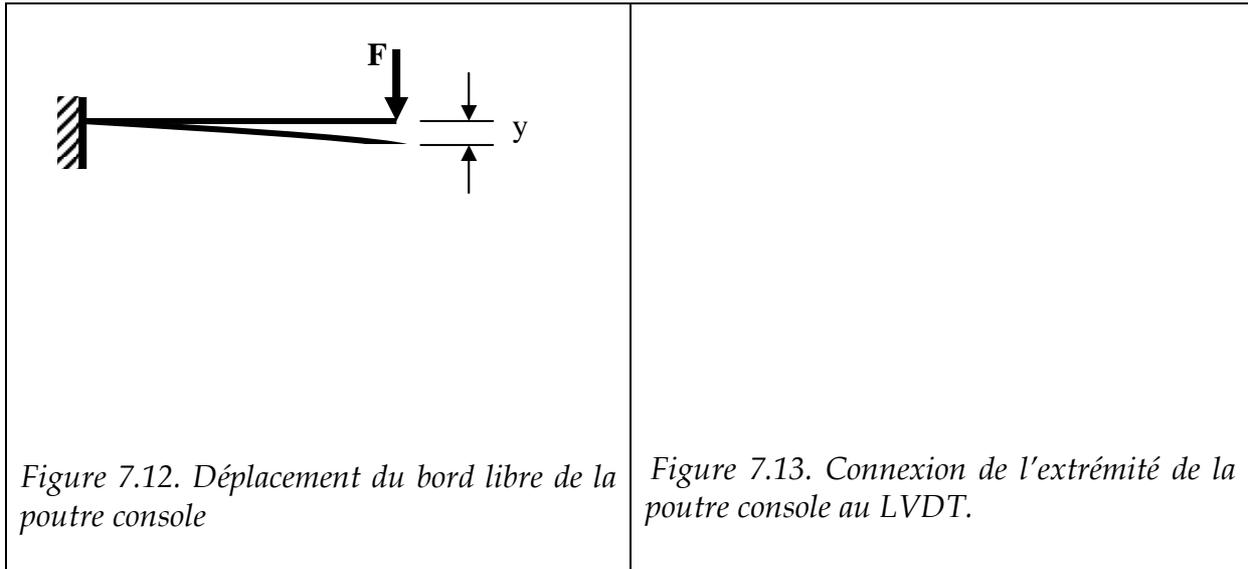
$I$ : Le moment d'inertie donné par l'expression suivante :  $I = \frac{W \cdot h^3}{12}$

$W$  et  $h$ : respectivement la largeur et la hauteur de la section de la poutre

**Utilisation d'un LVDT pour la mesure du déplacement de l'extrémité du bras:**

Le déplacement de l'extrémité libre de la poutre console va être mesurée à l'aide d'un LVDT (figures 7.13 et 7.14)





La caractéristique du LVDT a été mesurée au laboratoire. Les données suivantes ont été trouvées pour une tension d'entrée de 3 Volts dans le primaire du LVDT et une fréquence de 50 Hz.

Tableau 7.5. Résultats des mesures avec le LVDT

<b>d [mm]</b>	0	10	20	30	40
<b>V [mV]</b>	0	240	520	730	1020

Où

d est le déplacement du noyau en fer doux du LVDT en [mm]

V est la tension aux bornes du secondaire du LVDT

1. Calculer la sensibilité du LVDT
2. Trouver l'expression reliant la force F (appliquée à l'extrémité de la poutre) à la tension à la sortie du secondaire du LVDT.
3. En déduire l'expression de la sensibilité de ce système de mesure de force. Calculer sa valeur.
4. Nous considérons que la tension de sortie est mesurée à l'aide d'un voltmètre numérique. La résolution du voltmètre est de 1 mV, qu'elle est la valeur de la résolution pour la mesure de la force?
5. Une force  $F_1$  a été appliquée. La tension de sortie dans le secondaire a été mesurée, sa valeur est  $820\text{ mV} \pm 1\%$ . La tension appliquée au primaire du LVDT est :  $3\text{ V} \pm 0.5\%$ . Calculer  $F_1$  et l'incertitude sur cette valeur. On donne :  $L = 1\text{ m}$ ,  $W = 5\text{ cm}$ ,  $h = 5\text{ mm}$ ,  $E = 1.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$

✱ **PROBLEME 8 : REGULATION DE TEMPERATURE AVEC UNE BILAME METALLIQUE** ☺

Une bilame métallique est fabriquée à partir de l'acier inoxydable et du cuivre. La longueur de la lame, supposée droite à  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ , est de  $l_0 = 22$  cm. Ce capteur est utilisé dans un thermostat pour contrôler la température. L'objectif de cette expérience est de maintenir la température à une valeur de  $120^\circ\text{C}$ .

Les coefficients de dilatation des deux barres sont les suivantes :

Acier inoxydable :  $\alpha_1 = 17.3 (10^{-6})/^\circ\text{C}$

Cuivre :  $\alpha_2 = 1.1 (10^{-6})/^\circ\text{C}$

1. Donner l'expression de l'allongement d'une barre métallique, de coefficient de dilatation  $\alpha$ , en fonction de la température  $T$ . On supposera que sa longueur à une température de référence  $T_0$  est  $l_0$ .
2. Déterminer l'allongement de chacune de deux barres (acier et cuivre) à la température  $T_1 = 120^\circ\text{C}$ .
3. Expliquer le principe de fonctionnement de ce capteur (bilame métalliques).
4. Le rayon de courbure de la bilame métallique est donné par l'équation suivante :

$$\rho = \frac{K}{\Delta T} \quad (7.7)$$

Où  $\Delta T = T - T_0$  en  $^\circ\text{C}$  et  $\rho$  est le rayon de courbure en m.  $K$  est une constante qui dépend des propriétés thermo-physiques des lames en  $(\text{m } ^\circ\text{C})$ .

L'étalonnage de ce capteur a permis d'obtenir les résultats suivants :

Tableau 7.6. Résultats de l'étalonnage de la bilame métallique

T ( $^\circ\text{C}$ )	15	20	25	30	35	45
$\rho$ (m)	0,95	0,49	0,35	0,23	0,18	0,15

En utilisant la méthode de la régression linéaire (moindres carrées) déterminer la valeur de  $K$ . On pourra faire un changement de variable pour linéariser l'équation 7.7. Démontrer que cette relation est vraie.

5. Définir la sensibilité d'un instrument et déterminer sa valeur pour le capteur à  $T_1$ . Est ce que le capteur peut être considéré comme linéaire ?
6. Si la tolérance du capteur mesurant le rayon de courbure est de 1 mm, déterminer la résolution de la barre à la température  $T_1 = 120^\circ\text{C}$ .
7. La longueur  $L(T)$  de la bilame métallique à la température  $T$ , est supposée égale à la moyenne des longueurs des deux barres utilisées. Le bouton contrôlant le thermostat est placé à une distance  $e$  en dessous de l'extrémité de la barre, supposée droite à la température  $T_0$  (figure 7.14).

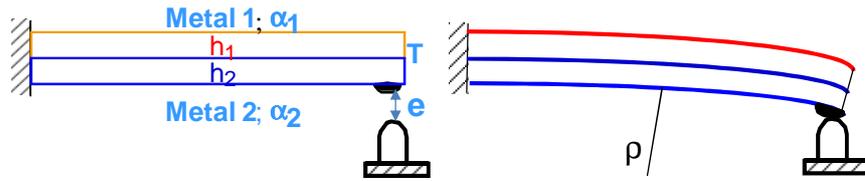


Figure 7.14. Principe d'utilisation de la bilame métallique

8. Démontrer que pour maintenir la température du système à une valeur constante  $T$ , le bouton poussoir doit être placé à une distance  $e$  telle que :

$$e(T) = \rho(T) \left( 1 - \cos \frac{L(T)}{\rho(T)} \right) \quad (7.8)$$

Calculer  $e$  pour  $T_1 = 120^\circ\text{C}$

9. Si les erreurs sur  $L(T)$  et  $\rho(T)$  sont de 1% déterminer l'erreur possible sur la distance  $e$ .

✱ **PROBLEME 9 : MESURE DE TEMPERATURE ☺**

NB : Le problème contient une description d'une expérience puis deux parties complètement indépendantes.

Dans une centrale thermique, la vapeur est refroidie avec de l'eau de mer (sans condensation) par l'utilisation d'un échangeur à contre-courant. L'eau de mer entre par le haut de l'échangeur (Inlet) et sort par le bas (Outlet). La vapeur circule en contre-courant dans un tube horizontal (figure 7.15)

L'échangeur de température est instrumenté par 4 capteurs de température :

- Deux thermocouples (Chromel/Constantin) pour mesurer les températures d'entrée  $T_{in,w}$  et  $T_{out,w}$  de l'eau de mer.
- Une thermistance ( $R_1$ ) pour mesurer la température d'entrée de la vapeur  $T_{in,v}$ . Les caractéristiques de cette thermistance sont:  $\beta = 2800 \text{ K}$  et  $R_{01} = 2500 \Omega$  à  $T = 25^\circ\text{C}$
- Un capteur de température à Résistance fait en platine ( $R_2$ ) pour mesurer la température de sortie de la vapeur  $T_{out,v}$ . Nous supposons que le coefficient de résistivité pour la température est  $\gamma_1 = 0.4/^\circ\text{C}$  et que  $\gamma_2$  est négligeable. La valeur de la résistance à  $0^\circ\text{C}$  est  $R_{02} = 100\Omega$ .

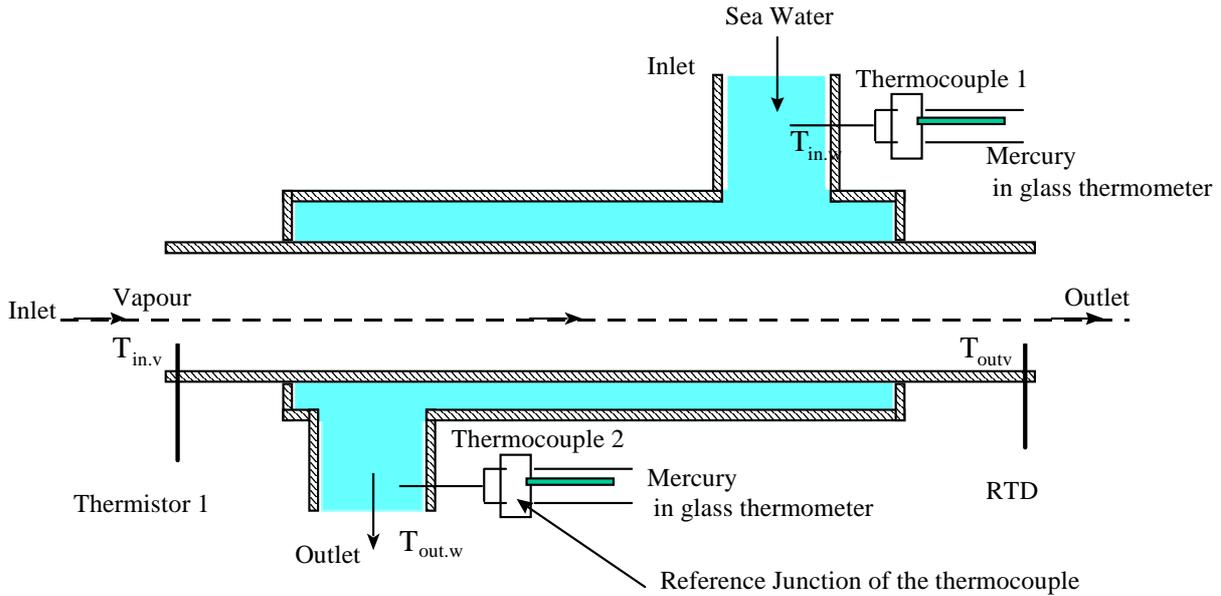


Figure 7.15. Echangeur de chaleur pour le refroidissement de la vapeur

### Partie 1. Etude des capteurs de température

Les températures des jonctions froides des thermocouples ( $RJT_1$  and  $RJT_2$ ) sont mesurées par deux thermomètres à mercure. Les f.e.m fournies par les capteurs sont mesurées par deux voltmètres digitaux (figure 7.15).

- 1.1. Dans des conditions stationnaires, les valeurs moyennes des paramètres mesurés au niveau de la sortie d'eau de mer (thermocouple 2) sont les suivants :  $Emf_1 = 0.163 \text{ mV}$ ,  $RJT_1 = 17.3^\circ\text{C}$ . Calculer la valeur moyenne de la température mesurée par ce thermocouple.
- 1.2. La température d'entrée de l'eau est mesurée dans des conditions stationnaires chaque 30 minutes pour une période de 3 heures. Les valeurs correspondantes sont les suivantes : 30.24, 30.75, 30.87, 30.24, 30.58 and  $31^\circ\text{C}$ . Calculer la valeur moyenne et l'erreur réalisée.
- 1.3. Quelles sont les erreurs réalisées durant l'expérience ? Préciser si elles sont systématiques ou aléatoires.

### Partie 2. Traitement statistiques des résultats expérimentaux

En ce qui concerne la mesure des températures de la vapeur, les résistances de la thermistance et de la RTD sont déterminées par un Pont de Wheatstone toutes les 30 minutes dans des conditions stationnaires. Les résultats expérimentaux sont illustrés dans le tableau 7.7.

Tableau 7.7: Résultats expérimentaux correspondant aux mesures de la température

<b>t (min)</b>	<b>R<sub>1</sub> (Ω)</b>	<b>R<sub>2</sub> (Ω)</b>
0	200	235
30	210	238
60	220	236
90	215	241
120	205	232
150	214	231
180	220	238

- 2.1. Calculer les valeurs correspondant de la température et la valeur moyenne
- 2.2. Calculer l'erreur  $\Delta T$  correspondant à la première mesure (Thermistance et RTD)
- 2.3. Si la résistance la plus faible qui peut être mesurée par le pont est de  $10 \Omega$ , déterminer la résolution des deux capteurs à  $T = 110^\circ\text{C}$ .
- 2.4. Quel est le capteur le plus adéquat pour ces mesures le RTD ou la thermistance ?

✠ **PROBLEME 10 : ETUDE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FILM LIQUIDE AUTOUR D'UN CYLINDRE ☺**

Afin d'étudier le transfert de chaleur dans un film liquide s'écoulant autour d'un tube horizontal lisse, l'expérience suivante a été réalisée: Un tube lisse avec un diamètre intérieur de  $d_{\text{int}} = 20 \text{ mm}$  et un diamètre extérieur  $d_{\text{ext}} = 22 \text{ mm}$  est placé horizontalement. Un flux de chaleur  $q = 100 \text{ W/m}^2$  est généré à l'intérieur du tube et transféré à l'extérieur du tube. Le film liquide est ruisselé en haut du tube et s'écoule autour du tube sans interruption (figure 7.16). On considère que la température de film est uniforme et elle est prise à sa valeur moyenne:

$$T_f = \frac{T_{\text{haut}} + T_{\text{bas}}}{2} \quad (7.9)$$

Deux Thermistances (symbole  $\square$  sur la figure 7.16) sont utilisés pour mesurer les températures  $T_{\text{haut}}$  et  $T_{\text{bas}}$ . Les caractéristiques de ces thermistances sont :

$$R_0 = 5000 \Omega \text{ à } 300 \text{ K}$$

$$\beta = 3000 / \text{K}$$

La distribution de température sur les parois du tube est déterminée en utilisant six thermocouples chromel–Alumel pour lesquels les jonctions de référence sont placées à la surface aux positions angulaires  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$  et  $180^\circ$  (les angles sont pris par rapport a la position verticale). Le symbole  $\bullet$  est utilisé pour l'emplacement des thermocouples sur les parois du tube.

**Partie 1 : Etude des Thermistances**

Dans cette partie du problème une attention particulière est portée à la mesure de la température avec les thermistances.

- 1.1. Donner l'expression de la Résistance de la thermistance comme fonction de la température
- 1.2. Les valeurs des résistances données par les thermistances sont :  
 $R_{\text{Haut}} = (1000 \pm 5) \Omega$  et  $R_{\text{Bas}} = (1000 \pm 5) \Omega$   
 Déduire les températures du film liquide en haut et en bas du tube.
- 1.3. Calculer les erreurs correspondantes.
- 1.4. Calculer la température moyenne du film  $T_f$ .

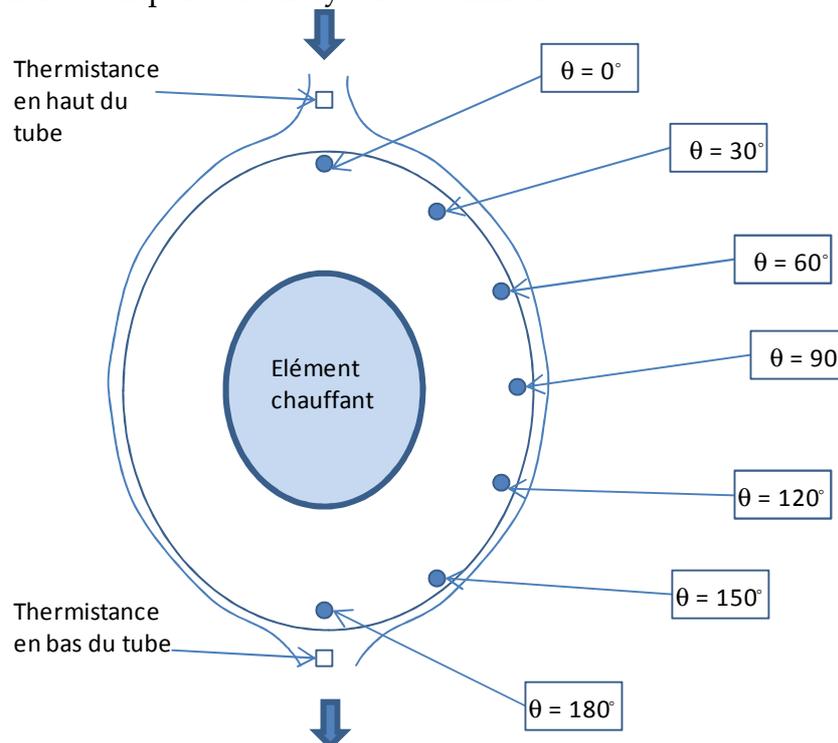


Figure 7.16. Distribution des capteurs autour du tube horizontal

## Partie 2 : Mesure de la Température avec des thermocouples

Les tensions délivrées par les thermocouples placés autour du tube (figure 7.16) sont résumées dans le tableau 7.8.

La jonction froide du thermocouple placé à  $90^\circ$  est placée à la température ambiante ( $T_{\text{amb}}=24^\circ\text{C}$ ), par ailleurs les jonctions froides de autres thermocouples sont placées à  $0^\circ\text{C}$

- 2.1. En utilisant le tableau du thermocouple Chromel-Alumel, déterminer les températures correspondantes aux différents thermocouples.

Tableau 7.8. Valeurs de la température autour du tube

$\theta$ °	tension [mV]
0	3.681
30	3.734
60	3.764
90	2.845
120	3.847
150	3.905
180	3.93

2.2. Le coefficient de transfert de chaleur local est déterminé par l'équation suivante:

$$h_{\theta} = q \times \frac{R_{int}}{R_{ext}} \times \frac{1}{(T_{\theta} - T_f)} \quad (7.10)$$

Où:

$T_{\theta}$  : est la température correspondant à la position  $\theta$ ,

$T_f$  : la température moyenne du film,

Etablir le tableau correspondant aux couples  $(\theta, h_{\theta})$

2.3. Calculer l'erreur absolue  $\Delta h_{\theta}$  pour la position  $\theta = 90^{\circ}$  quand les erreurs relatives correspondantes de la température  $T_{\theta}$  et le flux de chaleur  $q$  sont de 0.1%.  $T_f$  est supposée constante.

2.4. Les résultats expérimentaux montrent que la variation du coefficient local de transfert de chaleur  $h_{\theta}$  en fonction de la position angulaire  $\theta$  peut être exprimée par:

$$h_{\theta} = A \times e^{B \cdot \theta} \quad (7.11)$$

En utilisant la méthode des moindres carrés dites si cette équation est acceptable ou pas ? Déterminer les paramètres A et B.

### ✱ PROBLEME 11 ☺ :

#### MESURE DE DEPOT DE TARTRE SUR UN CYLINDRE HORIZONTAL

Lors de l'écoulement des fluides dans les échangeurs thermiques (un film liquide ruisselant sur un faisceau de tubes par exemple) des couches de tartre peuvent se déposer sur la surface externe d'échange, provoquant la chute des performances thermiques des échangeurs.

Plusieurs méthodes (directe et indirecte) peuvent être utilisées pour déterminer l'épaisseur de la couche du tartre (Figure 7.17). Ceci est réalisé en vue de déterminer à quel moment précis il faut procéder à un nettoyage acide de l'échangeur.

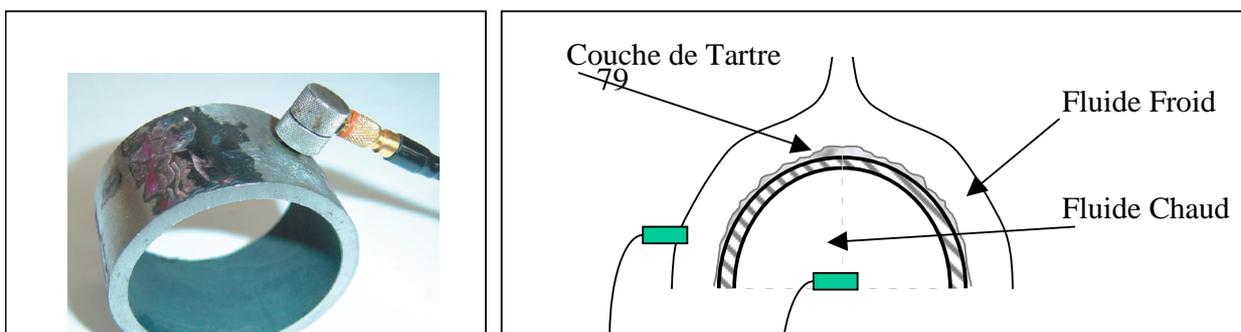


Figure 7.17 : Mesure de l'épaisseur d'une couche de Tartre sur les tubes d'un échangeur  
(a) Mesure directe, (b) Mesure Indirecte

### Partie 1 : Mesure directe de l'épaisseur d'un film de tartre sur des tubes

Dans le cas d'une mesure directe (Figure 7.17.a), un capteur convertit l'épaisseur mesurée en un signal électrique (tension U en mV).

Pour étalonner le capteur, on couvre le tube avec des feuilles métalliques d'épaisseur connues et on mesure à l'aide du capteur la tension délivrée. Les résultats de ces mesures sont illustrés dans le tableau 7.9.

- 1.1. Quels sont les signaux d'entrée et de sortie de la sonde ?
- 1.2. En utilisant la méthode de la régression linéaire (moindres carrées), peut-on exprimer la relation Tension (U)-Epaisseur (x) par une expression de la forme  $U = K \times x$  ?
- 1.3. Déterminer alors la valeur de K, en précisant son unité.
- 1.4. Comment appelle-t-on ce paramètre K ?
- 1.5. Quel est l'ordre de ce capteur alors ?
- 1.6. Après une période de 1500 heures de fonctionnement de l'échangeur, nous avons utilisé les deux méthodes (directe et indirecte) pour mesurer l'épaisseur de la couche de tartre déposée. Le capteur électronique délivre une tension de 3,76 mV. Quelle est alors l'épaisseur correspondante ?

Tableau 7.9: Etalonnage du capteur d'épaisseur

Epaisseur de la feuille en mm	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
Tension délivrée par le capteur en mV	0	2,48	4,89	7,62	10,32	12,46	14,98

### Partie 2 : Mesure Indirecte de l'épaisseur du tartre

Une deuxième méthode, qualifiée d'indirecte, peut être utilisée (Figure 7.17.b). Il s'agit de mesurer les températures de part et d'autre de la surface d'échange, ensuite déterminer le coefficient global de transfert de chaleur U par la relation suivante:

$$Q = U A \Delta T \quad (7.12)$$

Où Q est le flux de chaleur transféré via la surface d'échange A. Pour cette expérience, le flux de chaleur a été fixé à  $Q=10000 \text{ W/m}^2$  et la surface des tubes à  $A=10 \text{ m}^2$ .

$\Delta T$ : L'écart entre la température du fluide chaud  $T_c$  (à l'intérieur des tubes) et froid  $T_f$  (à l'extérieur des tubes)

$$\Delta T = T_c - T_f \quad (7.13)$$

Par ailleurs, le coefficient U dépend de l'épaisseur x du tartre par la relation suivante:

$$U = \frac{1}{\left[ \frac{1}{h_o} + (R_o + x) \left[ \frac{1}{R_i h_i} + \left( \frac{1}{k_w} + \frac{1}{k_s} \right) \times \text{Ln} \left( \frac{R_o}{R_i} \right) \right] \right]} \quad (7.14)$$

Où:

Paramètres	Signification	Unité	Valeur
$R_o$	Rayon extérieur des tubes de l'échangeur	m	0,0287
$R_i$	Rayon intérieur des tubes de l'échangeur	m	0,028
$h_i$	Coefficient intérieur de transfert de chaleur	$\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$	5000
$h_o$	Coefficient extérieur de transfert de chaleur	$\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$	4202
$k_w$	Conductivité thermique du matériau du tube	$\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}$	100
$k_s$	Conductivité thermique de la couche du tartre	$\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}$	15

Deux thermocouple de type K (Chromel-Alumel), sont utilisés pour la mesure des températures  $T_c$  et  $T_f$ . Après une période de fonctionnement de 1500h et à une température ambiante de  $19^\circ\text{C}$ , on a relevé les valeurs suivantes:

- Thermocouple 1 (fluide froid)  $V_1 = 2,9965 \text{ mV}$  .
- Thermocouple 2 (fluide chaud)  $V_2 = 2,259 \text{ mV}$  .

L'expérimentateur a oublié de mettre la jonction froide du deuxième thermocouple dans le bain glacé.

**N.B :** Il s'agit de la même expérience étudiée dans la partie I et pour laquelle nous avons utilisé les deux méthodes directe et indirecte.

- 2.1. Expliquer le principe de fonctionnement d'un thermocouple,
- 2.2. **a.** Pourquoi doit-on mettre la jonction froide d'un thermocouple à 0°C ?
  - b.** Est ce que l'erreur faite par l'expérimentateur (laisser la jonction froide à la température ambiante) est grave ?
  - c.** Sinon, comment peut-on la corriger ?
- 2.3. Déterminer les valeurs des températures des fluides chaud et froid,
- 2.4. Calculer la valeur du coefficient global de transfert de chaleur U,
- 2.5. Déduire la valeur de l'épaisseur de tartre x à cet instant,
- 2.6. Comparer les résultats obtenus avec les deux mesures (expériences de la partie I et II du problème).
- 2.7. En se basant sur l'équation (1), donner l'expression de l'erreur relative sur le coefficient global de transfert de chaleur
- 2.8. Si les erreurs relatives sur le flux Q est de 1% et les températures T<sub>c</sub> et T<sub>f</sub> sont de 0,05%, quelle est l'erreur relative réalisée sur le coefficient global de transfert de chaleur U ? Commentez le résultat obtenu,
- 2.9. En négligeant les autres erreurs, démontrer que l'erreur sur l'épaisseur x du tartre peut être donnée par la relation suivante:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta x}{C + x}, \text{ où } C \text{ est une constante} \quad (7.15)$$

**ENGLISH VERSION:**

---

## 2● ERROR AND UNCERTAINTY CALCULATION:

---

### ▪ EXERCISE 1

Two resistors have resistances of  $10.7 \pm 2$  ohm and  $26.5 \pm 0.5$  ohm.

1. What is their equivalent resistance when connected (1) in series, (2) in parallel?
2. Deduce the error on the equivalent resistance in each case.

### ▪ EXERCISE 3

When we measure the time constant of RC circuit, we assume the following expression:

$$A = \frac{V_c - V_s}{V_i - V_s} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.1)$$

Where :

$V_c$  : capacitor voltage

$V_s$  : saturation voltage

$V_i$  : initial voltage

$$V_s < V_c < V_i$$

Calculate the uncertainty of this expression  $\Delta A$  versus the uncertainty of the voltage  $V_i$ ,  $V_c$  and  $V_s$  (We assume that  $\Delta V_s = \Delta V_c = \Delta V_i = \Delta V$ )

### ▪ EXERCISE 4 ☺

In order to calculate the heat loss through the wall of a building, it is necessary to know the temperature difference between the inside and outside walls. If temperature of  $5^\circ\text{C}$  and  $20^\circ\text{C}$  are measured in each side of the wall by mercury in-glass thermometer with a range of  $-25^\circ\text{C}$  to  $+25^\circ\text{C}$  and a quoted accuracy figure of  $\pm 1\%$  of full-scale reading, calculate the possible error in the calculated figure for the temperature difference.

### ▪ EXERCISE 5

The density  $d$  of a liquid is calculated by measuring its depth  $c$  in a calibrated rectangular tank and then emptying it into a mass measuring system. The length and width of the tank are  $a$  and  $b$  respectively and thus the density is given by:

$$d = \frac{m}{a \times b \times c} \quad (2.2)$$

Where  $m$  is the measured mass of the liquid emptied out. If the possible errors in the measurements of  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $m$  are respectively 1%, 1%, 2% and 0.5%, determine the possible error in the calculated value of the density  $d$ .

▪ **EXERCISE 6**

A 3V direct current generator required for a circuit is obtained by connecting together two batteries of 1.5 volt in series. If the error on the voltage at the output of each battery is 1%, calculate the possible error on the output voltage of the 3V generator.

▪ **EXERCISE 7 ☺**

In order to measure the refractive index  $n$  for a wavelength  $\lambda$ , we can use a prism, with an angle  $A$ , realized with this material and measure the minimum deviation  $D_m$  between the incident and emergent rays.

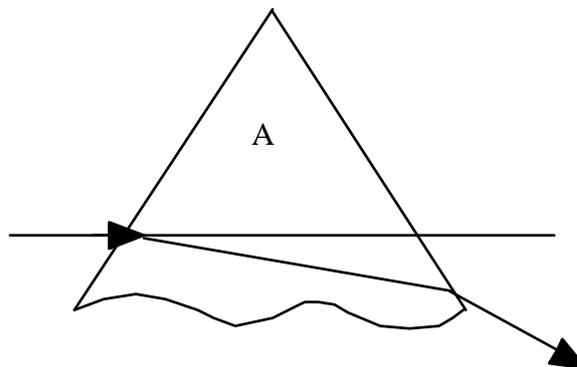


Figure 2.1. Diffraction par un prisme

So we have the following relation:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (2.3)$$

1. We call  $\Delta A$  and  $\Delta D_m$  the upper limits of the systematic errors on  $A$  and  $D_m$ , calculate  $\Delta n$  the upper limit of the systematic errors on  $n$ .
2. Numerical application:

$$A = 60'; D_m = 40'; \Delta A = 1'; \Delta D_m = 2'.$$

▪ **EXERCISE 18**

A venturi (Figure 2.5) is a measuring system allowing the measurement of a liquid mass flow in a tube by converting a variation in a pressure into a mass flow as the following:

$$Q_m = K \times \frac{\pi}{4} \times d^2 \times \sqrt{\rho \times (P_1 - P_2)} \quad (2.10)$$

Where  $P_1$  and  $P_2$  are the upstream and downstream pressures and  $d$  the measured diameter of the tube.

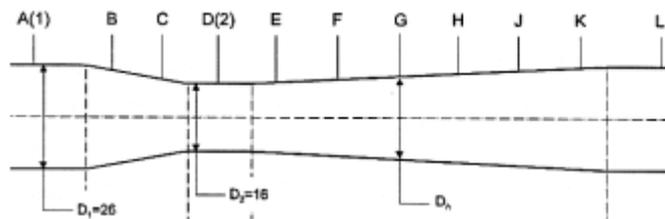


Figure 2.5. Principle of functioning of a diaphragm

1. If  $K = 1$ ,  $P_1 = 1$  bar,  $P_2 = 0.999$  bar,  $d = 20$  cm and  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> calculate the liquid mass flow (kg/s)
2. If the possible error in each measurement  $P_1$ ,  $P_2$  and  $d$  is 1% , estimate the possible error in the calculated mass flow.

▪ **EXERCISE 20: HALL EFFECT ☺**

When a flat plate semi-conductor material is crossed by a current  $I$  and submitted to an induction  $B$  doing an angle  $\theta$  with the current, a voltage  $V_H$  perpendicular to the current and to the induction appears.

This latter is given by the following relation:

$$V_H = K_H \times I \times B \times \sin\theta \quad (2.12)$$

Where  $K_H$  is a constant

For values of  $\theta$  close to 0 ( $\text{tg}\theta \approx \theta$ ), the relative error are 2% on  $I$ , 1% on  $B$  and 3% on  $\theta$ .

Calculate the possible error on  $V_H$

▪ **EXERCISE 21: AIR HUMIDITY MEASUREMENT**

The air Humidity  $r$  corresponds to the ratio of the vapour mass contained in the air to the dry air, and it is expressed by kg of vapour per kg of dry air.

The majority of humidity measurement instruments are based on the determination of the partial vapour pressure  $P_v$  and the total pressure  $P$  of the air.

The relation between these two pressures and the humidity is given by the following equation:

$$P_v = \left( \frac{r}{0.622 + r} \right) \times P \quad (2.13)$$

1. Determine the value of the humidity When  $P=1\text{bar}$  and  $P_v=0,1\text{ bar}$
2. Determine the error on the humidity when the errors carried on the pressures measurements are about 2%.

▪ **EXERCISE 22**

Estimate the error made when determining the volume of a sphere with a diameter of 100 mm if the diameter is measured with a standard deviation  $S_x = 0.05\text{mm}$

▪ **EXERCISE 23 ☺**

The volume flow rate of a liquid is calculated by allowing the liquid to flow into a cylindrical tank (stood on its flat end) and measuring the height of the liquid surface before and after the liquid has flowed for ten minutes. The volume collected after 10 minutes is given by:

$$\text{Volume} = (h_2 - h_1) \times \pi \times \left( \frac{D}{2} \right)^2 \quad (2.14)$$

Where  $h_1$  and  $h_2$  are starting and finishing surface heights and  $D$  is the measured diameter of the tank

1. If  $h_1 = 2\text{ m}$ ,  $h_2 = 3\text{ m}$  and  $d = 2\text{ m}$  calculate the volume flow rate in  $\text{m}^3/\text{s}$
2. If the possible error in each measurement  $h_1$ ,  $h_2$  and  $d$  is  $\pm 1\%$ , estimate the possible error in the calculated value of volume flow rate.

▪ **EXERCISE 25 : Wheatstone Bridge** 😊

Consider the Wheatstone bridge shown in figure 2.7.

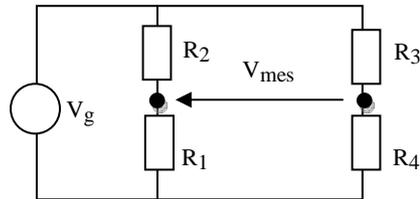


Figure 2.7: Wheatstone bridge

1. Demonstrate that the expression of  $V_{mes}$  can be given by the following equation:

$$V_{mes} = \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \cdot V_g \quad (2.15)$$

2. When the bridge is balanced,  $V_{mes}$  is equal to Zero. Find a relation between  $R_1$  and the other resistances.
3. Suppose that  $R_3 = R_4$  and  $R_1 = 2 \times R_2$ . Determine the error on  $V_{mes}$  if the value of  $R_1$  is measured with an error equal to 1%.

### 3 ● STATISTIQUE ANALYSIS

---

#### Part 1 : Simple Statistical Analysis

##### ▪ EXERCISE 1

The air pressure (in kPa) at a point near the end of an air supply line is monitored at 15 mn intervals over an 8h period. The readings are listed in four columns that follow:

*Table 3.1. Results of pressure measurements*

Column 1	Column 2	Column 3	Column 4
779	724	690	669
738	696	662	690
752	676	641	710
669	848	600	724
655	814	558	758
634	772	586	779
710	710	627	827
807	696	648	883

- List the pressure readings in order of increasing magnitude. Rearrange the data in five group intervals to obtain a frequency distribution. Show both the relative frequency and the cumulative frequency in this tabular rearrangement. Select the median pressure reading from the data.
- Construct a histogram. Superimpose a plot of the relative frequency on the histogram.
- Prepare a curve of the cumulative frequency
- For the air pressure data,
  - Compute the sample means of the individual columns
  - Compute the sample means of the columns 1+2 and 3+4
  - Compute the sample mean of the complete set of data
  - Comment on the results a, b, c.
- Determine the mode and compare if the median and the mean of the data
- Determine the
  - standard deviation  $s_x$
  - range R
  - mean deviation  $d_x$
  - variance  $s_x^2$

e. coefficient of variation  $C_V$

▪ **EXERCICE 3**

Repeated measurements of the height of a building gave the following results: 33.48, 33.46, 33.49, 33.50, 33.49, 33.51, 33.48, 33.50, 33.47, 33.48, 33.49, 33.50, 33.47, 33.51, 33.50 and 33.48 m.

1. Give the mean value, the median and the mode of these measurements
2. Calculate the standard deviation
3. Write properly the result of the measurement in the form :  $[h=(h \pm \Delta h)]$
4. Plot a histogram of the distribution

▪ **EXERCICE 4**

A and B observe light flashes to the north. A believes there is only one source of these, while B believes there are two. The bearings of each of 15 successive flashes were measured with the following results :

Direction (east of the north) : 10.72°, 11.05°, 11.36°, 10.74°, 11.16°, 10.85°, 10.92°, 11.18°, 10.96°, 10.63°, 11.02°, 11.26°, 10.64°, 10.95°, 11.13°.

Show these results, at the 5, 10, 15 measurements stages, as normalized histograms with intervals of 0.1° in width, starting from 10.5°.

Do you think that B'S more elaborate explanation is justified by these results?

The observers in the precedent problem make a total of 200 measurements altogether. At the end of 100 and 200 measurements the distributions were as follows.

*Table 3.2. Number of measurements within intervals of 0.1°*

Intervals	Number of observations (100 measurements)	Number of observations (200 measurements)
[10,5 - 10,6[	1	3
[10,6 - 10,7[	7	18
[10,7 - 10,8[	13	21
[10,8 - 10,9[	9	17
[10,9 - 11[	6	17
[11 - 11,1[	24	50
[11,1 - 11,2[	24	48
[11,2 - 11,3[	10	20
[11,3 - 11,4[	5	5
[11,4 - 11,5[	1	1

Construct the relevant histograms and compare them. Do you think a

sufficiently clear shape is emerging from the measurements to back the opinion of A or B against the other, and is so, who would you support ? Explain your answer.

▪ **EXERCISE 5**

The following measurements are made of the output voltage from a high gain amplifier which is contaminated due to noise fluctuation: 1.53, 1.57, 1.54, 1.54, 1.50, 1.51, 1.55, 1.54, 1.56 and 1.53.

1. Determine the mean value and the standard deviation,
2. Hence estimate the accuracy, to which the mean value is determined from these ten measurements,
3. If 1000 measurements were taken, instead of ten, but  $\sigma$  remained the same, by how much could the accuracy of the calculated mean value be improved?

▪ **EXERCISE 6**

Measuring the temperature at the outlet of a chimney gives us the following values (in degrees Celsius):

135.0, 136.1, 138.9, 142.7, 140.1, 137.2, 142.7, 140.0, 142.8, 134.5

1. Calculate the average temperature of the exhaust gases out of the chimney.
2. Calculate the standard deviation
3. The interval of confidence in the hypothesis which says that the gas temperature at the exit of the chimney is 139.0 ° C

▪ **EXERCISE 23 ☺**

In the calibration of a Resistance Temperature detector, we suppose that the variation of the Resistance versus Temperature is the following :

$$R = R_0 \times (1 + a_1 T + a_2 T^2) \quad (3.9)$$

Where  $R_0$  is the value of the resistance at 20°C.

1. Determine according to the experimental results ( $T_i, R_i$ ) the expression of the constants  $a_1$  and  $a_2$  by the least square method.
2. Basing on the experimental data given in the table 3.11, give the best estimations of the two values  $a_1$  and  $a_2$ .

*Table 3.11. Results of the resistance measurement*

<b>T</b>	20	25	30	35	40	45	50	55	60
----------	----	----	----	----	----	----	----	----	----

<b>R(T) in <math>\Omega</math></b>	122.5	144.8	147.9	158.3	169.1	182.3	194.9	211.1	227.1
--	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

▪ **EXERCICE 24 ☺**

The resistance of a thermistor at a temperature T is given by :

$$R = R_0 \exp \left[ \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (3.10)$$

Where :

$R_0$  : The resistance at the temperature  $T_0$  [K]

$\beta$  : a constant in the used range

$R_0 = 5000 \Omega$  at  $23^\circ\text{C}$

A static calibration is performed to determine the value of  $\beta$

1. Define the meaning of static calibration and explain how we can carry such experiment
2. The experimental results obtained are illustrated in the following table :

*Table 3.11. Temperature measurement results*

T( $^\circ\text{C}$ )	23	30	35	40	45	50	55	60
R( $\Omega$ )	5000	3950	365	2890	2500	2150	1860	1630

Determine the best estimation of  $\beta$  by using the linear regression analysis (least square method)

▪ **EXERCICE 25**

The following expression relates the loss angle  $\delta$  of a capacitor, the capacity C, the resistance R and the frequency f :

$$\text{tg}\delta = 2 \times \pi \times R \times C \times f \quad (3.11)$$

1. Calculate the absolute error made on  $\text{tg } \delta$ ; We give  $R = 4500\text{K}\Omega$  with  $\pm 1\%$ ,  $C = 3300 \text{ pF}$  with  $\pm 0.5\%$ ,  $f = 1000\text{Hz}$  with  $\pm 2\%$ .
2. Express correctly the measurement result of  $\text{tg } \delta$   
We measure the reactive power Q (in VAR) of a receiver. The active power P is equal to  $P = 1500\text{W}$  with  $1\%$ ; and the phase difference  $\varphi = 0.02$  radian to  $2\%$ .
3. Calculate Q and express correctly the results of the measurement.  
The value of Q is given by the following expression:  $Q = P \cdot \text{tg } \varphi$



## 4 ● SENSOR CHARACTERISTICS

---

### ▪ EXERCISE 1

To measure a liquid flow in a tube a turbine can be used. Such sensor is calibrated in an environment of 20°C and has the following rotational speed/liquid flow characteristics:

*Table 4.1. Characteristics of the sensor at 20°C*

Rotational speed (rd/s)	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
Liquid flow (Kg/s)	0,00	0,30	0,60	0,90	1,20	1,50

1. Explain the principle of functioning of this sensor
2. Determine the sensitivity of the turbine at 20°C
3. The sensor is used to measure a liquid flow at 50°C, list the different errors that can be done and precise if they are random or systematic.
4. The experiment carried at 50°C shows that the characteristic of the turbine changes to the following:

*Table 4.2 Characteristics of the sensor at 50°C*

Rotational speed(rd/s)	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
Liquid flow (Kg/s)	0,1	0,35	0,64	0,85	1,1	1,6

Determine the sensitivity at 50°C.

### ▪ EXERCISE 2

A load cell is calibrated in an environment at a temperature of 21 °C and has the following deflection/load characteristics:

*Table 4.3. Deflection/load characteristics at 21°C*

Load (kg)	0	50	100	150	200
Deflection (mm)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0

When used in an environment at 35°C, its characteristic changes to the following:

*Table 4.4. Deflection/load characteristics at 35°C*

Load (kg)	0	50	100	150	200
Deflection (mm)	0.2	1.3	2.4	3.5	4.6

1. Determine the sensitivity at 21°C and 35°C. What you remark?
2. Calculate the total zero drift and sensitivity drift at 35°C
3. Hence determine the zero drift and sensitivity drift coefficients (in units of  $\mu\text{m} / ^\circ\text{C}$  and  $(\mu\text{m par kg}) / ^\circ\text{C}$ )

▪ **EXERCISE 3: ACCURACY CALCULATION ☺**

The sensitivity of a probe platinum whose resistance is  $100 \Omega$  at  $0^\circ \text{C}$  is of the order of  $3.9 \cdot 10^{-1} \Omega/^\circ\text{C}$ , assumed substantially constant with temperature (linear variation of resistance with temperature).

Calculate the accuracy of the temperature measurement if we measure the resistance of the probe with an uncertainty of 0.1% in the vicinity of  $100^\circ \text{C}$ .

▪ **EXERCISE 6**

Develop the expression for the response of a temperature sensor to the truncated ramp type of input function shown in the following figure for :

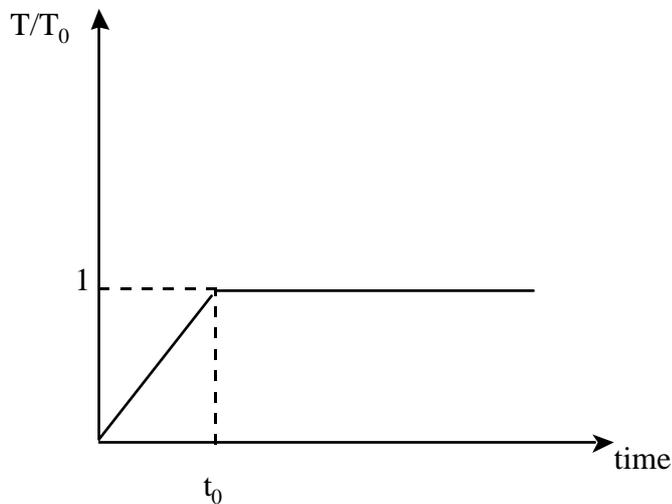


Figure 4.2. Ramp input variation

▪ **EXERCISE 7**

Use the following equation:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\lambda \times T}{C_2} \times \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (4.1)$$

Where

$$C_2 = 1.44 \cdot 10^{-2} \text{ m.K}$$

$$\lambda = 0.63 \mu\text{m}$$

To prepare a graph of error  $(dT/T)$  versus temperature  $T$  over the range from 1000 C to 4000 C for an optical pyrometer if the emissivity  $\varepsilon$  of the surface is in error by  $(d\varepsilon/\varepsilon)$  equal to :

- (a) 0.05                      (b) 0.10                      (c) 0.20                      (d) 0.50

## ▪ EXERCISE 11

A K type thermocouple (chromel-Alumel) is used for a furnace temperature measurement. The measuring junction is inside the furnace; the reference junction is at the ambient temperature. The ambient temperature is measured using a mercury in glass thermometer.

1. The obtained value for the ambient temperature is  $(18.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$ . The voltmeter reading is 9.19 mV. What is the value of the furnace temperature ?
2. The voltmeter resolution is 0.01 mV, does it make sense to change the mercury in glass thermometer by a second one having a resolution of  $0.1^\circ\text{C}$  ? What is the measuring system resolution at the furnace temperature ?
3. Calculate the uncertainty obtained on the furnace temperature

## 5 ● TEMPERATURE MEASUREMENT

---

### ▪ EXERCISE 1

A bi-metallic strip is fabricated from stainless steel and Invar with thickness of 5 mm and 1 mm respectively. Determine the radius of curvature of the strip if it undergoes a temperature change of :

- a) 120 °C      b) 230°C      c) -80°C

The mechanical and thermal properties of stainless steel and Invar are as follows

Stainless steel :	$E_1 = 193 \text{ Gpa}$	$\alpha_1 = 17.3 (10^{-6})/^\circ\text{C}$
Invar	$E_2 = 145 \text{ Gpa}$	$\alpha_2 = 1.1 (10^{-6})/^\circ\text{C}$

### ▪ EXERCISE 2 : TEMPERATURE BATH

A bi-metallic strip is fabricated from stainless steel and Invar with thickness of 5 mm and 1 mm respectively. This sensor is used in thermostats to control temperatures.

1. Explain the principle of functioning of this sensor in this case
2. Our aim is to maintain temperature at 120 °C. Determine the expansion of each strip at this temperature. The length of the strip at the temperature  $T_0 = 10^\circ\text{C}$  is 22 cm.
3. Determine the radius of curvature of the strip if it undergoes the temperature of 120 °C.

$$\rho = \frac{\left[ 3 \times (1 + r_h)^2 + (1 + r_h r_e) \left( r_e^2 - \frac{1}{r_h r_e} \right) \right] \times h}{6 \times (\alpha_1 - \alpha_2) \times (1 + r_h) \times \Delta T} \quad (5.1)$$

Where:

$$r_h = \frac{h_2}{h_1} = \text{the thickness ratio}$$

$$r_e = \frac{E_2}{E_1} = \text{the modulus of elasticity ratio}$$

4. Determine the sensitivity of this sensor at 120°C (Write the equation 1 as

$$\rho = \frac{K}{\Delta T} )$$

5. If the smallest length variation that can be measured by the sensor used to measure the radius of curvature is 0.001 mm, determine the resolution of the bimetallic strip at this temperature.
6. We suppose that the length  $L(T)$  of the bimetallic strip at the temperature  $T$ , is the average of the two strip lengths. The switch controlling the thermostat will be placed at a distance  $e$  under the extremity of the strip supposed straight at the temperature  $T_0$  (figure 1).

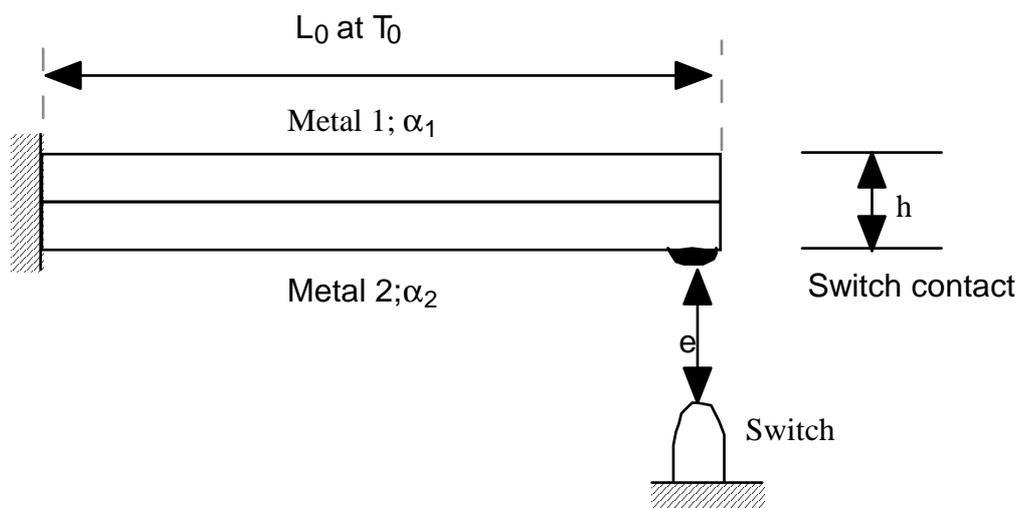


Figure 5.1. Functioning principle of a Bimetallic strip

Demonstrate that if  $T$  is the desired temperature, the switch must be placed at the distance:

$$e = \rho(T) \times \left( 1 - \cos \left( \frac{L(T)}{\rho(T)} \right) \right) \quad (5.2)$$

Calculate  $e$  for  $T = 120^\circ\text{C}$

5. If the error on the  $L(T)$  and  $\rho(T)$  is 1% determine the possible error on the distance  $e$ .

The mechanical and thermal properties of stainless steel and Invar are as follows :

Stainless steel :	$E_1 = 193 \text{ Gpa}$	$\alpha_1 = 17.3 (10^{-6})/^\circ\text{C}$
Invar	$E_2 = 145 \text{ Gpa}$	$\alpha_2 = 1.1 (10^{-6})/^\circ\text{C}$

▪ **EXERCISE 4**

A RTD fabricated from platinum exhibits a temperature coefficient of resistivity  $\gamma_1 = 0.003902/^\circ\text{C}$ . Assume that  $\gamma_2$  is negligible. If the resistance of the sensor is  $100\ \Omega$  at  $0^\circ\text{C}$ , find the resistance at :

- a)  $-240^\circ\text{C}$     b)  $-120^\circ\text{C}$     c)  $90^\circ\text{C}$     d)  $260^\circ\text{C}$     e)  $600^\circ\text{C}$     f)  $900^\circ\text{C}$

▪ **EXERCISE 5**

The relationship between resistance and temperature, respectively for nickel and platinum resistance sensors, are given by :

$$r(\theta) = R_0 ( 1 + 5.4916 \cdot 10^{-3} \theta + 6.6666 \cdot 10^{-6} \theta^2 ) \quad (5.3)$$

$$R(\theta) = R_0 ( 1 + 3.9080 \cdot 10^{-3} \theta - 5.8019 \cdot 10^{-7} \theta^2 ) \quad (5.4)$$

Where  $\theta$  is in degree Celsius and  $R_0 = 100\ \Omega$

1. You want to measure a temperature around  $50^\circ\text{C}$ , which sensor you have to choose?
2. If the smallest resistance, which can be measured, is  $0.1\ \Omega$ , determine the resolution to three significant figures of the chosen sensor.

▪ **EXERCISE 7**

If  $\beta = 4350\text{K}$  and  $R_0 = 3000\ \Omega$  at  $T_0 = 298\ \text{K}$ , determine the resistance of a thermistor at :

- a)  $-80^\circ\text{C}$     b)  $-40^\circ\text{C}$     c)  $0^\circ\text{C}$     d)  $50^\circ\text{C}$     e)  $75^\circ\text{C}$     f)  $150^\circ\text{C}$

▪ **EXERCISE 8**

The thermistor described in exercise 7 (3) is connected in a constant current potentiometer circuit.

- a- if the current is  $10\ \text{mA}$ , prepare a graph showing the output voltage  $V_0$  as the temperature increases from  $-50^\circ\text{C}$  to  $300^\circ\text{C}$ .
- b- Use a thermistor having the same  $\beta$  but  $R_0 = 110\ \Omega$  at  $25^\circ\text{C}$ .

▪ **EXERCISE 10**

The resistance of a thermistor at a temperature  $T$  is given by :

$$R = R_0 \times \exp \left[ \beta \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (5.3)$$

Where:

$R_0$  : The resistance at the Temperature  $T_0$  [K],

$\beta$  : a constant in the used range,

$R_0 = 5000 \Omega$  at 300 K,

$\beta = 3000 / K$ ,

- 1- Determine the value of the temperature when  $R = (1000 \pm 5)\Omega$
- 2- If the smallest resistance which could be measured using a Wheatstone Bridge is  $10 W$ , determine the resolution of the thermistor at  $T = 320 K$  and  $T = 800 K$

### ▪ EXERCISE 11

A DVM is being used to measure the output voltage  $V_0$  from a copper-constantan thermocouple, as shown in the following figure 5.5. Determine the output voltage  $V$  indicated by the DVM.

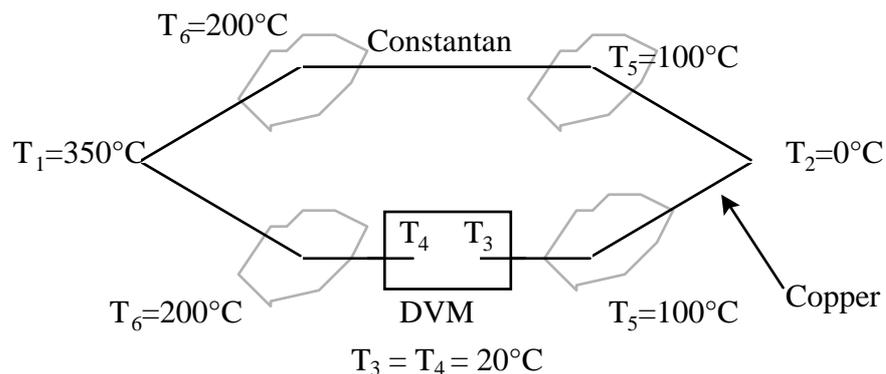


Figure 5.5. Measure of the output voltage of a thermocouple by a DVM

### ▪ EXERCISE 12 ☺

For a thermocouple, when the cold junction is kept at  $0^\circ C$ , the calibration data are given below:

Table 5.4. Data for temperature measurement by a thermocouple

$\theta(^{\circ}C)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$E(\mu V)$	0	397	798	1203	1611	2020	2436	2850	3266	3681	4095

1. In this range the calibration curve is assumed to be a straight line, use the least square method to determine its equation  $E = f(\theta)$ .
2. At  $E = 2020 \mu V$ , determine the error committed on the temperature if the curve is used.

3. This thermocouple is used with the cold junction at  $\theta_s = 20^\circ\text{C}$ . Determine, using the table, the temperature if the emf is  $E = 2052 \mu\text{v}$ .

▪ **EXERCISE 13** ☺

Consider a thermostatic enclosure which is kept at a constant temperature  $T_u = 20^\circ\text{C}$ ; the surrounding environment temperature is  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ . The enclosure is heated using a heat source which temperature is  $T_a$  (see Figure 1). To measure the temperatures at these points, 3 Chromel-Alumel thermocouples are used. The reference junctions for these thermocouples are kept at the ambient temperature  $T_0$ .

1. Explain the principle of a thermocouple
2. List the names of some other temperature transducers.
3. The thermocouple measuring the temperature  $T_u$  is connected to the terminal of a digital voltmeter, what should be the value of the displayed voltage at the voltmeter screen?
4. Actually, the value displayed by the voltmeter is 0,652 mV. Explain this result
5. The voltmeter connected to the thermocouple measuring  $T_a$  displays a voltage equal to 6.112 mV, what is the heat source Temperature value?

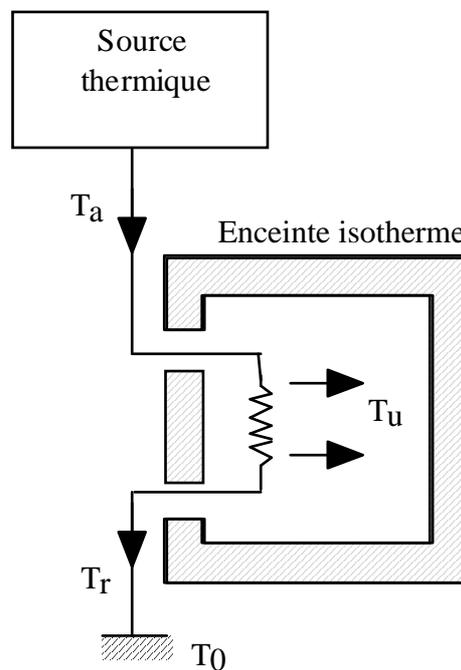


Figure 5.6. Heating of isothermal enclosure

▪ **EXERCISE 14** ☺

1. Explain the principle of functioning of a thermocouple,
2. What are the other instruments for temperature measurement that you know?
3. A digital Voltmeter is connected to a thermocouple "Alumel-Constantan" whose the hot junction is placed in the boiling water at the atmospheric pressure and the cold junction at the ambient ( $T_{amb} = 20^{\circ}\text{C}$ ). What should be the voltage displayed by the voltmeter?
4. The value displayed by the voltmeter is in fact 2.3 mV, what you remark? Interpret the result.

▪ **EXERCISE 15**

A K type thermocouple (Chromel-Alumel) is used for a furnace temperature measurement. The measuring junction is inside the furnace; the reference junction is at the ambient temperature. The ambient temperature is measured using a mercury in glass thermometer.

1. The obtained value for the ambient temperature is  $(18.0 \pm 0.5)^{\circ}\text{C}$ . The voltmeter reading is 9.19 mV. What is the value of the furnace temperature ?
2. The voltmeter resolution is 0.01 mV, does it make sense to change the mercury in glass thermometer by a second one having a resolution of  $0.1^{\circ}\text{C}$  ? What is the measuring system resolution at the furnace temperature ?
3. Calculate the uncertainty obtained on the furnace temperature

## 5.5. OPTICAL PYROMETERS

▪ **EXERCISE 18**

The total radiation from a non-black body is given by :

$$W_{\lambda}(T) = \epsilon(\lambda, T) W_{\lambda,B}(T) \quad (5.4)$$

Where  $\epsilon(\lambda, T)$  is the total emissivity and  $W_{\lambda,B}(T)$  is the total radiation of a black body at the same temperature and with the same surface.

In general, the optical pyrometer uses a fraction of the emitted spectrum centred on the Wavelength  $\lambda_0$  and having a width  $\Delta\lambda$ . A photoelectric sensor converts this radiation in an electrical signal,  $S_{el}$  given by :

$$S_{el} = \int_{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} K(\lambda) \times S_d(\lambda) \times W_{\lambda}(T).d\lambda \quad (5.4)$$

Where  $K(\lambda)$  is a geometrical factor and  $S_d(\lambda)$  is the emissivity of the

photoelectric detector.

- Using the Planck's Law :  $W_{\lambda,B} = \frac{C_1}{\lambda^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$  and assuming that  $\lambda = \lambda_0$

and  $\frac{C_2}{\lambda T} \gg 1$  show that :  $S_{el} = K(\lambda_0) \times S_d(\lambda_0) \times \epsilon(\lambda_0, T) \times \frac{C_1 \Delta\lambda}{\lambda_0^3} \times \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda_0 T}\right)$

- If the optical pyrometer is calibrated relative to a black body, show that the electrical signal  $S_{el}$ , corresponds in the case of non-black body to a temperature T given by :

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_B} + \frac{\lambda_0}{C_2} \times \text{Ln}\epsilon(\lambda_0)} \quad (5.5)$$

Where  $T_B$  is the black body temperature

- If the smallest temperature readable by the pyrometer is  $\Delta T_B = 5$  K, calculate the resolution of the pyrometer for non-black body at  $T = 1273$  K, when  $\lambda_0 = 0.66$  mm,  $\epsilon(\lambda_0) = 0.63$  and  $C_2 = 1.4388 \times 10^4 \mu\text{m K}$
- If the pyrometer uses two Wavelengths  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  with the same spectral width  $\Delta\lambda$  and when  $S_d(\lambda_1) = S_d(\lambda_2)$   $K(\lambda_1) = K(\lambda_2)$  and  $\epsilon(\lambda_1) = \epsilon(\lambda_2)$ 
  - Give the electrical signals  $S_{el1}$  and  $S_{el2}$  corresponding respectively to  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$
  - Calculate the ratio  $r = \frac{S_{el.1}}{S_{el.2}}$  and give the main interest of this type of pyrometer.

## 6 ● REVIEW-CURRENT ISSUES

---

### ▪ EXERCISE 1 ☺

1. Remember the basic units constituting the MKSA (indicate the corresponding physical quantities).
2. Precise the functioning principle of the transducer in an electronic instrument, give an example.
3. Explain the difference between systematic and random errors. Give an example.
4. What is the median of a statistic population?

### ✦ EXERCISE 2 ☺

1. Give a figure resuming the principle components of an electronic instrument.
2. What is the difference between an RTS and a Thermistor ?
3. Explain the difference between static and dynamic characteristics of an instrument. Give some examples.
4. Define a first order system.

### ✦ EXERCISE 3 ☺

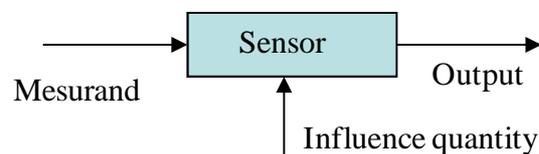


Figure 6.1. Functioning of a sensor

1. What is the function ensured by this sensor?
2. What is the mesurand?
- 3.a. What represents the influence parameter?
  - b. How should be its contribution to the outlet signal?
  - c. Can-we use a sensor to measure an influence parameter? if yes give an example

### ▪ EXERCISE 4:

Precise if the following errors are random or systematic :

- Aging of the sensor,
- Sensitivity error,
- Reading errors,
- Zero-drift of a measuring device,
- Magnetic noise around the measuring device,

✦ **EXERCISE 5** ☺

1. Give a definition of the conditioning circuit (in an electronic instrument) and give an example.
2. In which conditions could we apply the Gaussian distribution in a group of N values of measurements of the parameter X?
3. Demonstrate that in the least square method, the coefficients m and b allowing to rely by a line  $Y_i = m x_i + b$  the dispersed points, have as expression:

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} \quad (6.1)$$

and

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} \quad (6.2)$$

✦ **EXERCISE 6**

1. Give the definition of precision and accuracy and explain the difference between them.
2. What is the difference between active and passive transducers? Give some examples
3. Define a second order system. Give an example
4. What is the difference between a first order and second order systems?

✦ **EXERCISE 7**

1. Define the resolution of a measuring device. Is it a static or dynamic characteristic?
2. What are the physical principles used for temperature measurements
3. On which factors should we base to choose in convenient manner a temperature sensor? Illustrate by an example.

## 7● REVIEW PROBLEMS

---

### ▪ PROBLEM 2

Two communicating vessels are filled with a liquid. The first vessel is subject to a pressure  $P_1$  and the second is a subject to  $P_2$

1. Demonstrate that the liquid level difference ( $2 \Delta h$ ) is related to the pressure difference. Give the expression of  $\Delta P$  as a function of  $\Delta h$

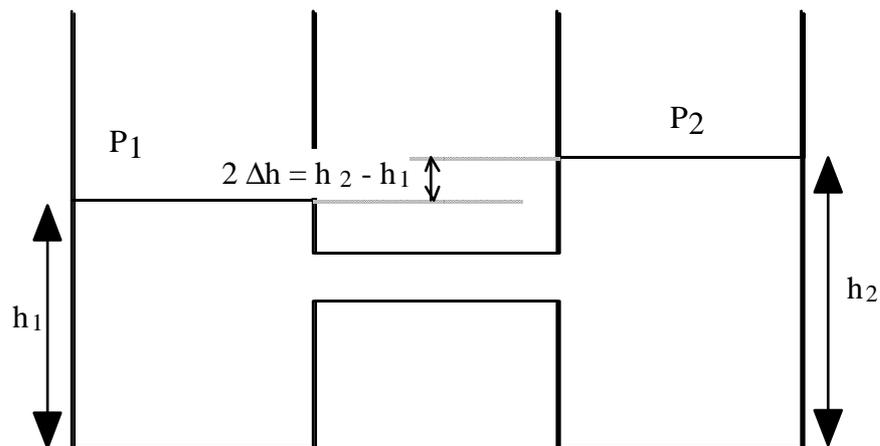


Figure 7.2. Connected vessels

2. In each of vessels, is immersed a concentric cylinders plate capacitive transducer. The transducer length is  $L$ .

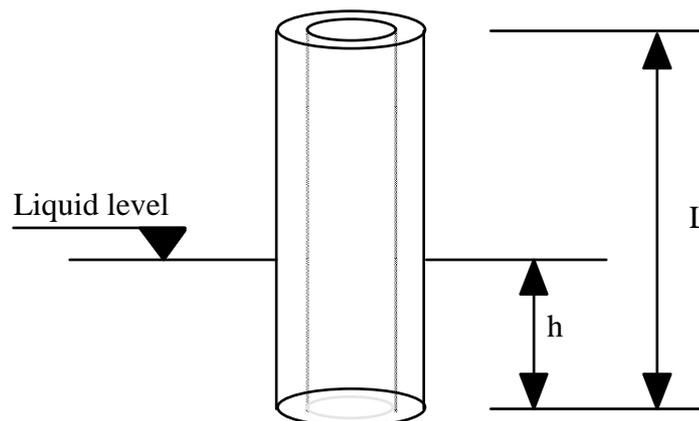


Figure 7.3. Level Measurement

At the initial conditions  $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$  and  $h_1 = h_2 = h_0 = L/2$ . In these conditions, both transducers are having the capacitance:

$$C_1 = C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r h_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{2\pi\epsilon_0(L - h_0)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (7.1)$$

$h_0$  : is the liquid level in the vessel at the initial conditions ( $h_0 = L/2$ )

$\epsilon_0$  : the permittivity of the free space between the capacitor plates

$\epsilon_r$  : the relative permittivity of the liquid

$a, b$  : respectively the radius of the interior and exterior cylinder

Then a pressure  $P_1$  is applied on vessel 1. The liquid levels become :

$h_1 = h_0 - \Delta h$  in vessel 1

and  $h_2 = h_0 + \Delta h$  in vessel 2

Demonstrate that  $(C_1 - C_2)$  is proportional to  $(h_2 - h_1)$

3. Both capacitors are connected in two arms of a Sauty Bridge as shown in the following figure:

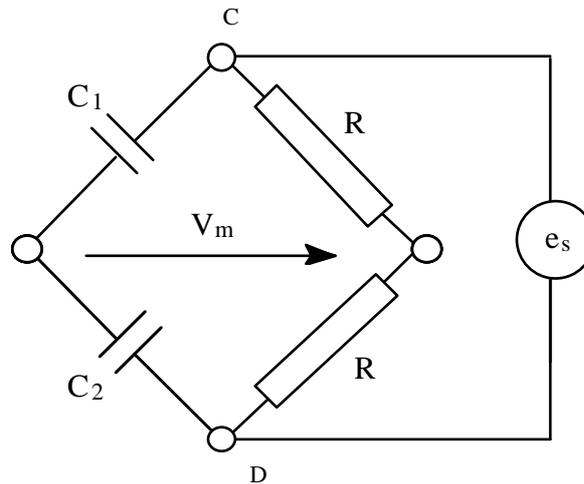


Figure 7.4. Sauty Bridge

- a. Demonstrate that  $V_m$  is equal to Zero at the initial conditions (the bridge is balanced).
- b. Demonstrate that when  $P_1$  is different from  $P_2$ ,  $V_m$  is proportional to  $(C_1 - C_2)$  and hence to  $(h_2 - h_1)$ ; Give the relation between  $V_m$  and  $(h_2 - h_1)$
4. Can this system be used to measure the difference of pressure ( $P_1 - P_2$ ) between the two vessels? Give a relation between  $(P_1 - P_2)$  and  $V_m$
5. Both capacitors have a Length  $L = 1$  m, the relative permittivity of the liquid is  $\epsilon_r = 4$ . The bridge power supply voltage  $\epsilon_s = 6$  Volts.
6. If the Voltmeter which is measuring the bridge unbalance voltage  $V_m$  is having a resolution of 1 mV, what can be the resolution in liquid displacement  $(h_2 - h_1)$ ?

▪ **PROBLEM 3 : PHOTODIODE ☺**

We use a photodiode as a sensor to measure the light flux. The diode functions as a current generator  $i = S_d \cdot \Phi$ , where  $\Phi$  is the incident light flux to measure and  $S_d$  the proper sensitivity of the diode in A/W (independent from the frequency of  $\Phi$ ). In fact the electrical output of the setting is the voltage  $v$  at the edges of the resistance  $R_m$  (see figure 7.5.a) instead of the current  $i$ . The equivalent electrical scheme of the setting can be represented by that of the figure 7.5.b, where  $C$  is the capacitance of the junction of the polarised diode in inverse.

1. What are the input signal  $m$  and the output signal  $S$  of this sensor?
2. Basing on the the equation of the equivalent electrical circuit (figure 7.5.b), show that the amplitude  $I_1$  of the electric current can be written as :

$$I_1 = j \times \omega \times C \times V_1 \times e^{j\varphi} + \frac{V_1}{R_m} \times e^{j\varphi} \quad (7.2)$$

The incident flux modulated  $\Phi(t) = \Phi_1 \times e^{j\omega t}$ ; the current  $i(t) = I_1 \times \Phi_1 \times e^{j\omega t}$ ;  
 $I_1 = S_d \cdot \Phi_1$  and the output voltage  $V(t) = V_1 \times e^{j(\omega t + \varphi)}$

3. Supposing the system first order with an output signal  $S$ , given by :

$$A \times \frac{dS}{dt} + B \times S = m, \text{ give the cut frequency of the circuit } f_c = (B/2\pi A).$$

4. Show that  $V_1 = \frac{R_m \times S \times d \times \Phi_1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}$  and  $\varphi = -\text{Arctg}(f/f_c)$

5. Calculate the sensitivity of this photopile  $s(f)$  and its time constant  $\tau = 1/(2\pi f_c)$ .

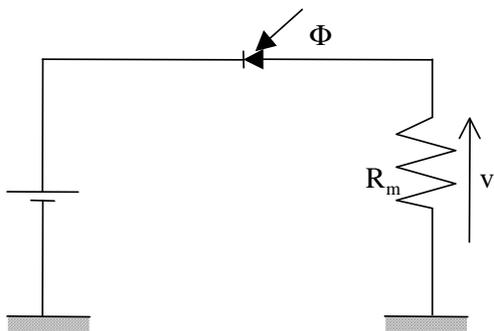


Figure a

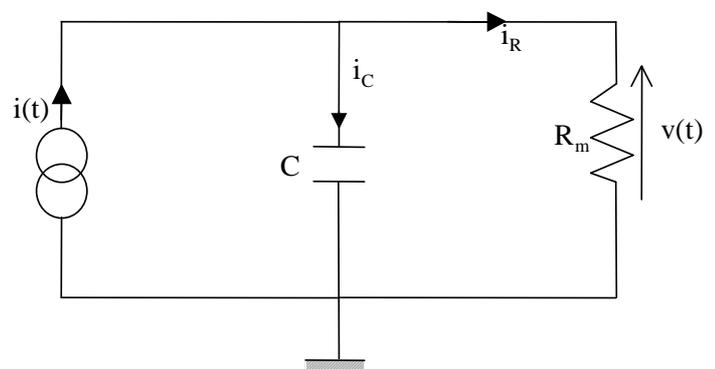


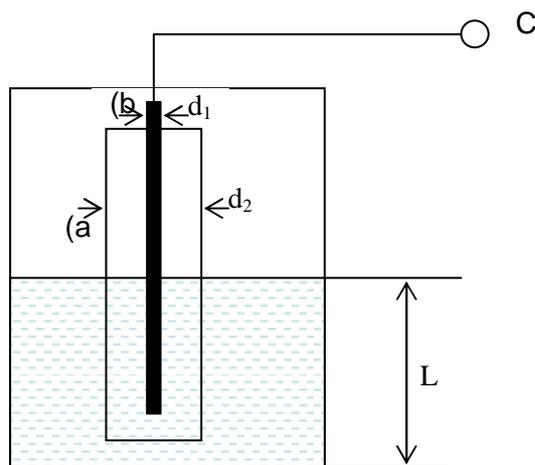
Figure b

Figures 7.5. Schemes of the photodiode

▪ **PROBLEM 4 ☺**

### Part 1 : Level measurement by detecting physical properties

To measure the liquid level, we can detect physical parameters that are significantly different between the atmosphere and the fluid such as capacitance, conductivity, etc. The sensor is in direct contact with the liquid to detect its electrical properties. In most applications, a rod electrode is arranged vertically in the tank. The electrode is insulated; the metallic vessel acts as a reference electrode (see figure 7.6).



Principle of operation for a capacitance – type level device

- An insulated electrode protrudes into the liquid  
The capacitance between the inner conductor and the tank wall is measured
- (b) As a capacitance level switch, the electrode can be mounted at the appropriate position

Figure 7.6. Principle of operation for a capacitance – type level device

The measured capacitance  $C$  depends on the liquid permittivity  $\epsilon_1$ . The level of the liquid is given by :

$$L = \frac{\text{Ln} \frac{d_2}{d_1} \times C}{2 \times \pi \times \epsilon_0 \times \epsilon_1} \quad (7.3)$$

$\epsilon_0$  is the dielectric constant of vacuum ( $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ )

$d_2$  is the diameter of the insulation :  $d_2 = 2,5 \text{ cm}$

$d_1$  is the diameter of the electrode :  $d_1 = 1 \text{ cm}$

- 1.1. What are the input and the output of the sensor?
- 1.2. Determine the expression of the sensitivity
- 1.3. Is the sensor linear? Justify your response
- 1.4. A static calibration of the sensor gives the following results (see table 7.2)

Table 7.2. Static calibration of the level sensor

Capacitance C (pF)	25	30	35	40	45	50	55	60
Liquid Level (cm)	34	41,2	47,5	54,5	61,7	68,1	75,1	81,7

Plot the curve  $C = f(L)$

1.5. Determine by using the regression analysis, the relative permittivity  $\epsilon_1$  of the liquid

1.6. If the relative errors on:

- the diameters  $d_1$  and  $d_2$  are 2%,
- the capacitance is 5% and
- the relative permittivity of the liquid  $\epsilon_1$  3%,

Determine the error on the liquid level  $\Delta L$  for a liquid level of 68 cm.

## Part 2 : Temperature measurement

A Chromel-Alumel thermocouple is used to measure the liquid temperature. Its reference junction is placed at the ambient temperature. An RTS made of Platinum is placed near the reference junction (See Fig2)

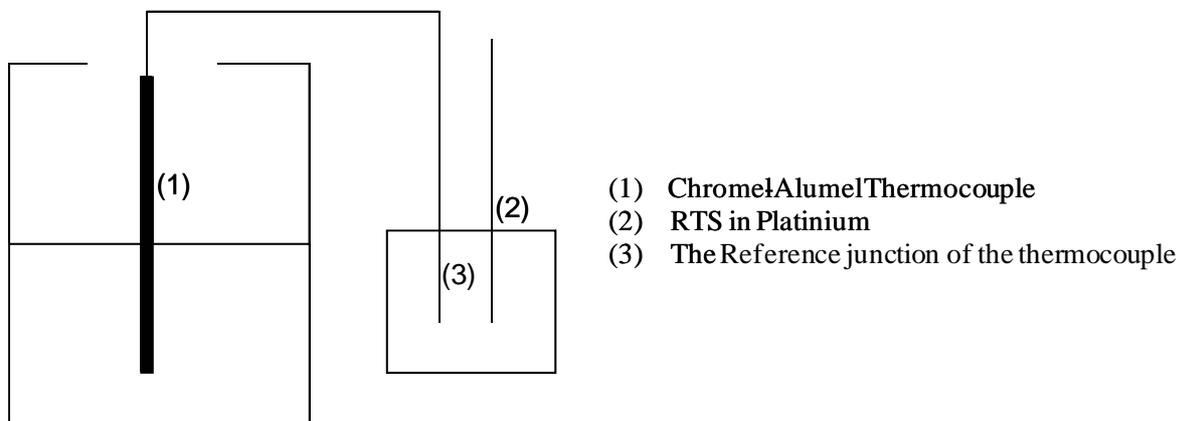


Figure 7.7. Temperature measurement with a thermocouple

2.1. Explain why the platinum is the most used material in RTS manufacturing

2.2. The resistivity coefficient of the RTS is  $\gamma = 0.4/^\circ\text{C}$ ,  $R(25^\circ\text{C}) = 100 \Omega$

During the experiment, the resistance is measured by a Wheatstone Bridge (WB)

- a. if the WB indicates  $200 \Omega$ , deduce the temperature measured by the RTS
- b. Explain the Self heating phenomenon. Which kind of error is it?
- c. The self heating Factor  $F_{sh} = 0,5^\circ\text{C}/\text{mW}$ , The supply Voltage is 1V DC,

determine the variation of the temperature  $\Delta T_{sh}$  due to the self heating.  
Correct the measured value.

- 2.3. If the smallest value that can be measured by the WB is  $0,5 \Omega$ , calculate the resolution of the RTS at  $50^\circ\text{C}$
- 2.4. The voltage indicated by the thermocouple is  $3,456 \text{ mV}$ . Determine the temperature of the liquid.

▪ **PROBLEM 5 : HUMIDITY MEASUREMENT**

A humidity Transducer is made of a humidity sensor « HOS 201 » in parallel with a resistor, which is basically a resistive sensor; its resistance is  $R$ . This sensor is installed in parallel with a resistor; its resistance value is  $R' = 1 \text{ M}\Omega$ . (see figure 7.8)

For a value of the relative humidity ( $h \geq 50\%$ ), The value of the resistance of the “HOS201” can be calculated using the following expression:

$$R = A \cdot e^{-B \times h} \quad (7.3)$$

With:

$$A = 6,92 \cdot 10^{12} \text{ SI}\Omega,$$

$$B = 21$$

$h$  the relative humidity (%)

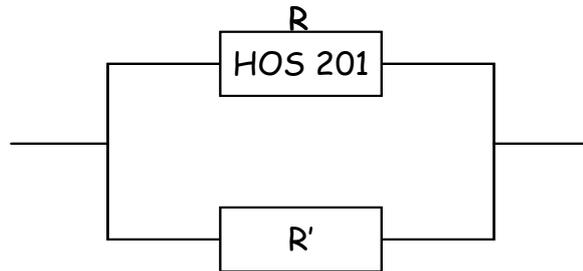


Figure 7.8. Schematic view of the transducer for humidity measurement

**Notice :** 50 % of humidity corresponds to  $h = 0,50$ .

1. What is the unit of  $A$ ?
2. Give the expression of  $R_1$  (made by putting in parallel the resistance  $R'$  and the humidity sensor HOS 201)
3. The Resistance  $R_1$  is now installed in a Wheatstone bridge (see Figure 7.9). Resistances  $R_2$  and  $R_4$  are equal; the value of each of them is  $10 \text{ K}\Omega$ .

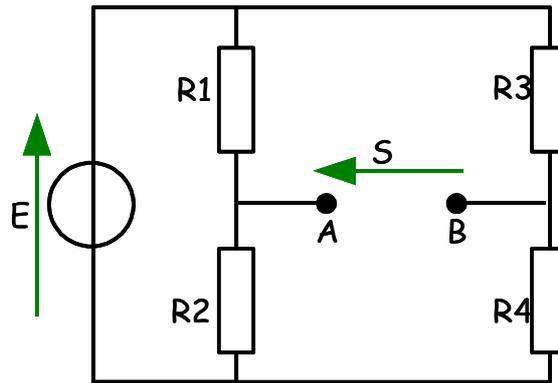


Figure 7.9 : The Wheatstone Bridge installation

What is the expression of the voltage (S) between A and B, as function of  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  and E? Show that it can be expressed by the following equation:

$$S = E \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

4. What is the equilibrium condition of this bridge as function of the four resistances values?
5. What is the value of the resistance of the sensor, noted  $R_{50}$  at 50 % of humidity?
6. The bridge is in equilibrium when  $R_1 = R_{50}$ . Deduce the value of  $R_3$  in this case.
7. What is the expression of the voltage S ( $S_0$ ,  $S_{10}$  and  $S_{50}$ ), for respectively the values of the sensor resistance  $R_0$ ,  $R_{10}$  and  $R_{50}$  as function of  $R_i$  and E?  $R_0$ ,  $R_{10}$  and  $R_{50}$  correspond to the values of the sensor "HOS201" resistance R at the respective humidity values of 0%, 10% and 50%.
8. For various values of the relative humidity h, the output voltage of the bridge S and the value of the resistance  $R_1$  are determined experimentally, the obtained values are given in table 7.3. Use a linear regression (least squares method) to deduce the value of E.

Table 7.3. Variation of the resistance  $R_1$  and the voltage S versus the humidity h

<b>h (%)</b>	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<b><math>R_1</math> (k<math>\Omega</math>)</b>	1000	999,4	99,9	95,8	25,9	5,2
<b>S (mV)</b>	-0,199	-0,198	-0,175	1,422	104,97	2497,8

## ▪ PROBLEM 6 : Flow Measurement

To determine the mass flow  $Q$  (in  $\text{m}^3/\text{s}$ ) of a fluid in a pipe a change of section is created, while passing from a section  $A_1$  to a section  $A_2$  (see Figure 7.10). By measuring the pressure  $P_1$  upstream and  $P_2$  downstream, we can deduce the mass flow  $Q$  by the following relation (deduced from the Bernoulli equation):

$$Q = V_1 A_1 = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2 (P_1 - P_2)}{\rho}} \quad (7.4)$$

$p_1-p_2$  : differential Pressure, in Pascal

$A_1$  : Surface of the first section in  $\text{m}^2$

$A_2$  : Surface of the second section in  $\text{m}^2$

$\rho$  : fluid density in  $\text{kg}/\text{m}^3$

$Q$  : mass flow in  $\text{m}^3/\text{s}$

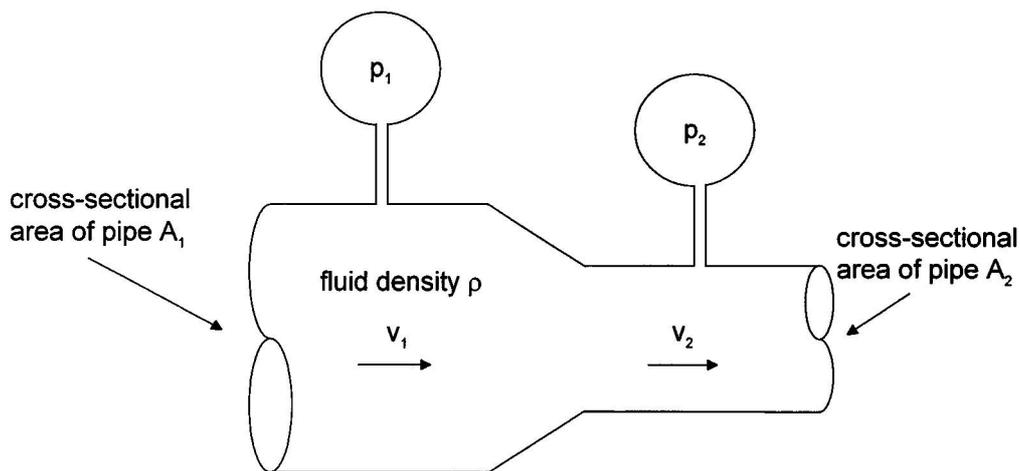


Figure 7.10. System for mass flow measurement

During a practical training, a students group have decided to check the equation (7.4). Hence, they have mounted an experimental similar to Figure 7.10. They used two tubes with diameters of  $d_1 = 20$  cm and  $d_2 = 18$  cm. As fluid, they used the water with a density of  $1000\text{kg}/\text{m}^3$ . Two anemometers were set up to measure the pressure  $p_1$  and  $p_2$ . They also installed a flowmeter downstream from the section shown in figure 7.10 to perform a direct measurement of the mass flow  $Q$  in  $\text{m}^3/\text{h}$ . Thanks to a pump "variable frequency," they were able to achieve variations in flow from 0 to  $2000$   $\text{m}^3/\text{h}$ . The results of this experiment are shown in the following table (Table 7.4):

Table 7.4. Results corresponding to the Experiment of flowmeter measurement

$p_1$ (bar)	$p_2$ (bar)	Q (m <sup>3</sup> /h)
2,24	2,11	796,54
2,64	2,45	962,97
3,03	2,78	1104,60
3,32	3,03	1189,69
3,66	3,21	1481,98
3,87	3,36	1577,68
4,02	3,42	1711,24
4,14	3,52	1739,53

1. Establish, on the attached graduated paper, the graph  $Q = f(\sqrt{p_1 - p_2})$

What your remark?

2. We can express the following equation  $Q = f(\sqrt{p_1 - p_2})$  by a relation such:

$$y = m x + b.$$

Demonstrate, by using the least square method (linear regression), that the parameters m and b can be expressed by:

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

and

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

3. We define the correlation coefficient parameter  $\rho^2$  such as

$$\rho^2 = 1 - \frac{n-1}{n-2} \frac{[y^2] - m[xy]}{[y^2]} \quad (7.5)$$

$$\text{With } [y^2] = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \text{ and } [x.y] = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}$$

What is the significance of this parameter?

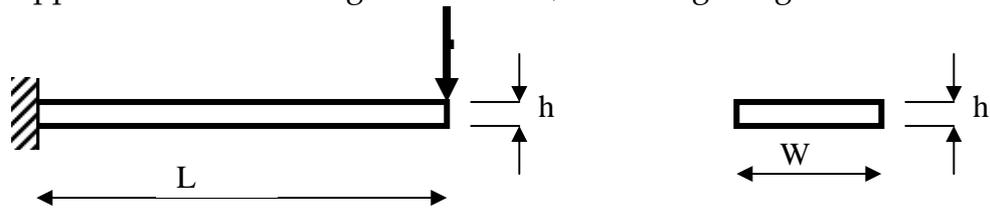
4. Determine the equation of the curve. Show the validity of the equation 7.4

5. During the first measurements (see Table 7.4), the students have made an error of 1% on the measurement of pressures  $p_1$  and  $p_2$ . What is the error made on the measurement of flow rate Q? What do you think about this measurement?

6. a. Define the resolution of a measurement system.
- b. If the resolution of pressure sensors during the last measurement (Table 7.4) is 0.01 bars, what would that of the flow measurement system? Comment the result.

▪ **PROBLEM 7 : FORCE MEASUREMENT**

Consider a cantilever deflecting arm which is subject to a force  $F$ . The deflecting arm has a length  $L$ , and a rectangular cross section. Its width is  $W$  and its height is  $h$ . The force  $F$  is applied to the deflecting arm free end, according to figure 7.11.



**Figure 7.11:** Schematic view of the deflecting arm

When the force  $F$  is applied, a displacement of the deflecting arm free edge occurs (see figure 7.12). This displacement is equal to:

$$y = \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot F = \frac{4 \cdot L^3}{E \cdot W \cdot h^3} \cdot F \quad (7.6)$$

Where:

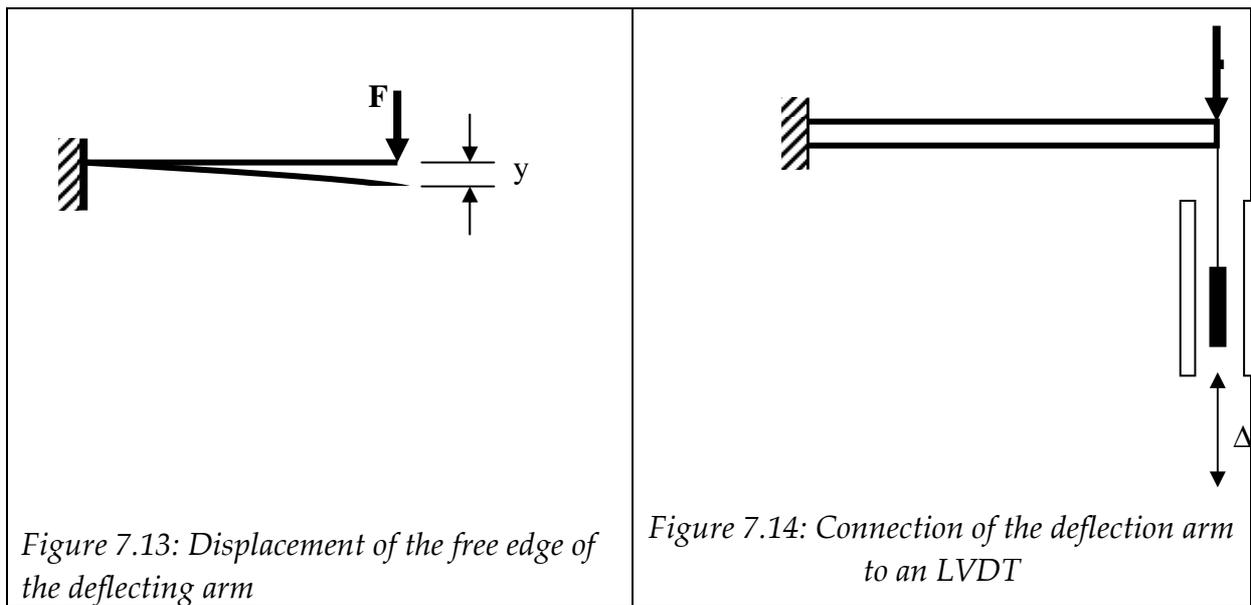
$E$ : the YOUNG Modulus

$I$ : the moment of Inertia given by the following expression:  $I = \frac{W \cdot h^3}{12}$

$W$  and  $h$ : respectively the width and height of the deflecting arm

**Use of an LVDT for the deflecting arm free end displacement measurement**

The displacement of the free end of the deflecting arm is going to be measured using an LVDT (ref. Figure 7.13)



The LVDT characteristic curve has been measured in the laboratory. The following data have been found for an input voltage of 3Volts in the Primary of the LVDT and a frequency of 50 Hz.

Table 7.5. Results of measurement with the LVDT

<b>d [mm]</b>	0	10	20	30	40
<b>V [mV]</b>	0	240	520	730	1020

Where:

d is the displacement of the LVDT magnetic core in [mm]

V is the Voltage across the secondary of the LVDT

1. Calculate the LVDT Sensitivity using the least squares method
2. Find the expression which relates the force F (applied to the deflecting arm) to the Output Voltage in the secondary of the LVDT.
3. Deduce the expression of the sensitivity of this force measuring system. Calculate its value.
4. We consider that the output voltage is measured using a digital voltmeter. The digital voltmeter resolution is 1 mV, what can be the resolution in the force measurement?
5. A force  $F_1$  has been applied. The output voltage in the secondary has been measured, its value was  $820\text{ mV} \pm 1\%$ . The applied voltage in the primary of the LVDT is  $3\text{V} \pm 0.5\%$ . Calculate  $F_1$  and the uncertainty on this value. Given:  
 $L = 1\text{m}$ ,  $W = 5\text{ cm}$ ,  $h = 5\text{ mm}$ ,  $E = 1.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$

#### PROBLEM 8 : TEMPERATURE REGULATION WITH BIMETALLIC STRIP

A bi-metallic strip is fabricated from stainless steel and Copper. The length of the strip at the temperature  $T_0 = 10\text{ }^\circ\text{C}$  is 22 cm. This sensor is used in thermostats to control temperatures. Our aim is to maintain temperature at  $120\text{ }^\circ\text{C}$ . The expansion coefficients of the two bars are the following :

Stainless steel :  $\alpha_1 = 17.3 (10^{-6})/^\circ\text{C}$

Copper :  $\alpha_2 = 1.1 (10^{-6})/^\circ\text{C}$

1. Give the expression of the expansion of a metallic strip with an expansion coefficient  $\alpha$  as a function of temperature  $T$ . We suppose that the length of the strip at the temperature  $T_0$  is  $l_0$ .
2. Determine the expansion of each strip (stainless steel and Copper) at the temperature  $T_1 = 120^\circ\text{C}$
3. Explain the principle of functioning of this sensor in this case
4. The radius of curvature of the strip, if it undergoes the temperature  $T$ , is given by the following equation :

$$\rho = \frac{K}{\Delta T} \quad (7.7)$$

Where  $\Delta T = T - T_0$  in  $^\circ\text{C}$  and  $\rho$  is the curvature radius in m.  $K$  is a constant that depends on thermal and physical properties of the two strips ( $\text{m}\cdot^\circ\text{C}$ ). The characteristic of this sensor is given by the following table:

Table 7.6. Results of the bimetallic strip calibration

T ( $^\circ\text{C}$ )	15	20	25	30	35	45
$\rho$ (m)	0,95	0,49	0,35	0,23	0,18	0,15

By using the regression analysis determine the value of the constant  $K$ . You can by a variable change transform the (Equation 7.7) to a linear relation. Demonstrate that the relation 7.7 is true.

5. Define the sensitivity of a sensor and determine its value for the studied instrument at  $T_1$
6. If the smallest length variation that can be measured by the sensor used to measure the radius of curvature is 1 mm, determine the resolution of the bimetallic strip at this temperature.
7. We suppose that the length  $L(T)$  of the bimetallic strip at the temperature  $T$ , is the average of the two strip lengths. The switch controlling the thermostat will be placed at a distance  $e$  under the extremity of the strip supposed straight at the temperature  $T_0$  (figure 7.14).

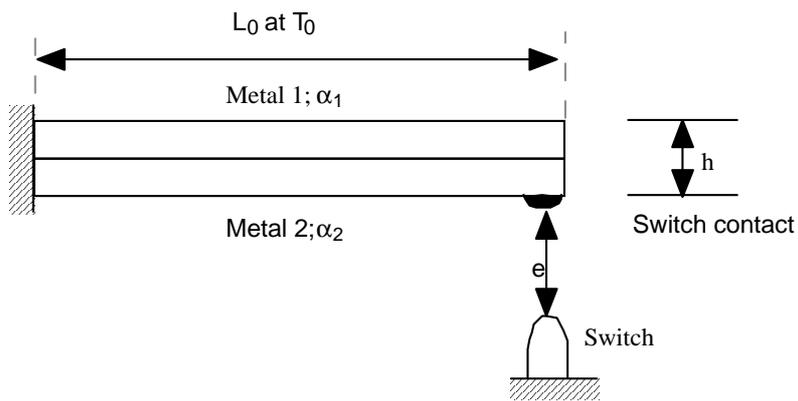


Figure 7.14. Principle of using bimetallic strip

Demonstrate that if  $T$  is the desired temperature, the switch must be placed at the distance :

$$e(T) = \rho(T) \left( 1 - \cos \frac{L(T)}{\rho(T)} \right) \quad (7.8)$$

Calculate  $e$  for  $T = 120^\circ\text{C}$

8. If the error on the  $L(T)$  and  $\rho(T)$  is 1% determine the possible error on the distance  $e$ .

### PROBLEM 9: TEMPERATURE MEASUREMENT

**Att:** The problem contains a description of an experiment. The two parts are completely independent.

In a thermal power plant, the vapor flows in a horizontal tube (without condensation) and it is cooled with seawater by using a heat exchanger (figure 7.15). The seawater enters at the top of the exchanger (Inlet) and goes out by the bottom (Outlet).

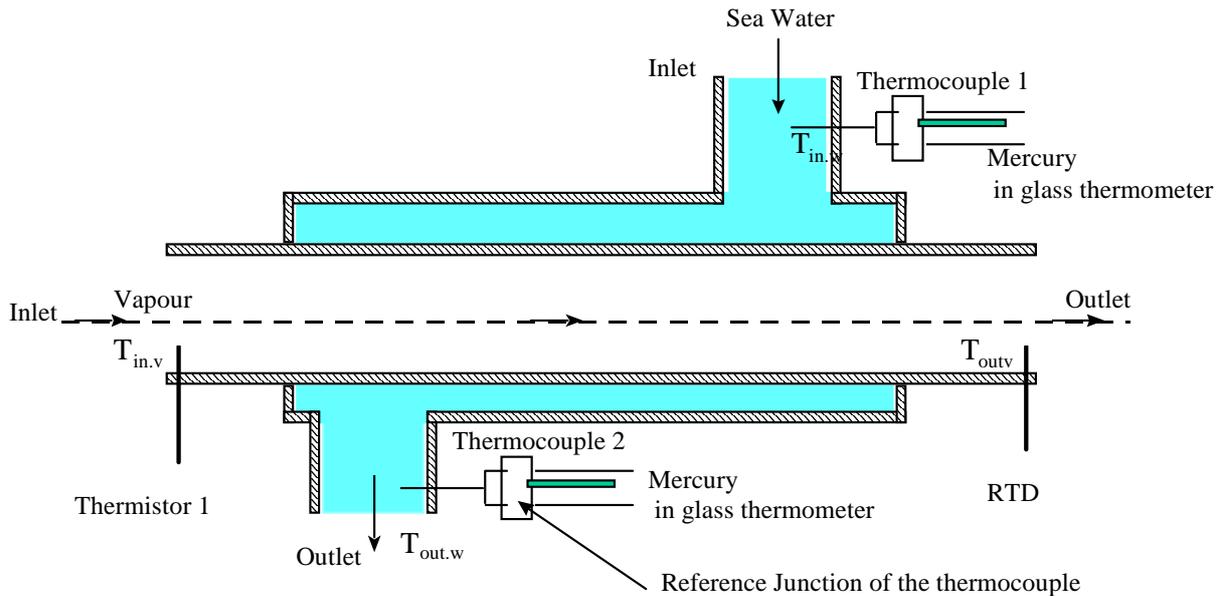


Figure 7.15. Heat exchanger for seawater cooling

The heat exchanger is equipped with 4 temperature sensors:

- Two (Chromel/Constantan) thermocouples to measure the seawater inlet and outlet temperatures:  $T_{in,w}$  and  $T_{out,w}$
- A Thermistor ( $R_1$ ) to measure the vapor inlet temperature  $T_{in,v}$ . The characteristics of this sensor are  $\beta = 2800 \text{ K}$  and  $R_{01} = 2500 \Omega$  at  $T = 25^\circ$
- A platinum Resistance Temperature detector ( $R_2$ ) to measure the vapor outlet temperature  $T_{out,v}$ . We assume that the RTD exhibits a temperature coefficient of resistivity  $\gamma_1 = 0.4/^\circ\text{C}$  and the value of  $\gamma_2$  is negligible. The value of the RTD resistance is  $R_{02} = 200\Omega$  at  $0^\circ\text{C}$ .

### Part 1: Study of temperature sensor

Two mercury-in-glass thermometers measure the thermocouples reference junctions temperatures (RJT1 and RJT2), see figure 7.15. The emf delivered by the sensors are measured by two digital voltmeters.

- 1.1. The steady state conditions, the values corresponding to the outlet parameters are the following:  $\text{Emf}_2 = 0,163 \text{ mV}$ ,  $\text{RJT}_2 = 17,3 \text{ C}$ . Calculate the corresponding value of the outlet temperature from the thermocouple table.
- 1.2. The inlet water temperature is measured in steady state conditions each 30 minutes during three hours. The corresponding values are the following: 30.24, 30.75, 30.87, 30.24, 30.58 and  $31^\circ\text{C}$ . Calculate the mean temperature and uncertainty using the standard deviation.
- 1.3. What are the errors to be considered during this experiment? Explain if they are systematic or random

## Part 2: Statistical analysis of experimental results

Concerning the measurement of the vapor temperatures, the values of the thermistor and the RTD resistances are determined each 30 minutes using a Wheatstone bridge. The experimental results obtained in steady state conditions are given in table 7.7.

Table 7.7. Experimental results for temperature measurement

t (min)	R <sub>1</sub> (Ω)	R <sub>2</sub> (Ω)
0	200	235
30	210	238
60	220	236
90	215	241
120	205	232
150	214	231
180	220	238

- 2.1. Calculate the corresponding inlet and outlet vapor temperatures and the mean values for each of them
- 2.2. Calculate the error DT corresponding to the first measurement (Thermistor and RTD)
- 2.3. If the smallest resistance which could be measured using a Wheatstone bridge is 0,2 Ω, determine the resolutions of the thermistor and the RTD at T = 110 C.
- 2.4. Which sensor is more adequate to this experiment: the RTD or the thermistor?

### ▪ PROBLEM 10: Falling film flow around a horizontal tube

In order to investigate heat transfer in a liquid film flowing around horizontal smooth tube, the following experience was carried: A smooth tube with an internal diameter  $d_{\text{int}} = 20 \text{ mm}$  and an external diameter  $d_{\text{ext}} = 22 \text{ mm}$  is placed at the horizontal position. A heat flux of  $q = 100 \text{ W/m}^2$  is generated inside the tube and is delivered to the liquid film outside the tube. The liquid film is distributed at the top of the tube and falls without interruption around it (see figure 1). We consider that the film temperature is uniform and its value is taken as the mean value:

$$T_f = \frac{T_{\text{top}} + T_{\text{bottom}}}{2} \quad (7.9)$$

Two Thermistors (symbol  $\square$  on figure 1) are used to measure the temperatures

$T_{\text{top}}$  and  $T_{\text{bottom}}$ , with the following characteristics:

$$R_0 = 5000 \, \Omega \text{ at } 300 \text{ K}$$

$$\beta = 3000 \text{ /K}$$

The temperature distribution on the tube wall is measured using six chromel–Alumel thermocouples for which the hot junctions are placed on the tube surface at angles of  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$  and  $180^\circ$  (angles are reported to the vertical positions). The symbol ● is used for thermocouple's placement on figure 1.

In this part of the problem we will focus on the temperature measurement by thermistors. However in the second part we will consider the measurement with thermocouples.

### **Part 1: Measuring temperature with thermistors**

- 1.1. Give the expression of the Thermistor's Resistance as a function of temperature
- 1.2. The values of resistance given by the two thermistors are:  
 $R_{\text{top}} = (1000 \pm 2) \, \Omega$  and  $R_{\text{bottom}} = (980 \pm 1.5) \, \Omega$   
Deduce the temperatures of the liquid film at the top and the bottom of the tube
- 1.3. Calculate the corresponding errors
- 1.4. Calculate the average temperature of the film  $T_f$

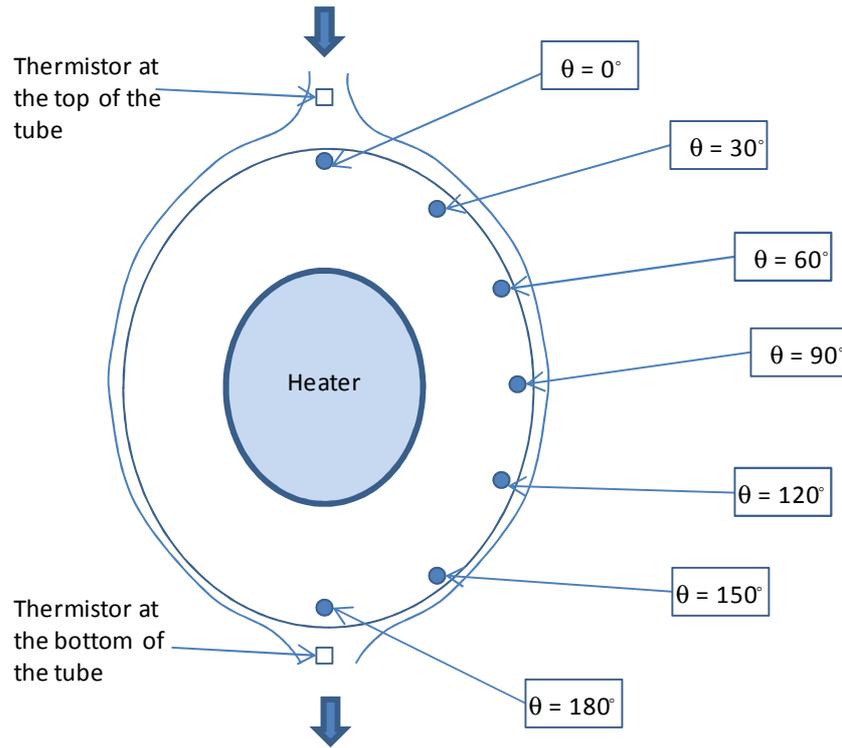


Figure 7.16. Distribution of the sensors around the falling film horizontal tube

## Part 2 : Measuring temperature with thermocouples

The output voltage corresponding to the different thermocouples located around the tube (figure 1) are resumed in the table 1:

Table 7.8. The output voltage delivered by the different thermocouples

$\theta$ °	Voltage [mV]
0	3.681
30	3.734
60	3.764
90	2.845
120	3.847
150	3.905
180	3.93

The cold junction of the thermocouple placed at  $90^\circ$  is placed at the ambient temperature ( $T_{amb}=24^\circ\text{C}$ ), however for the other thermocouples the cold junctions are placed at  $0^\circ\text{C}$

- 2.1. Using the Chromel-Alumel table, determine the temperatures corresponding to the different thermocouples.
- 2.2. The local heat transfer coefficient is determined by the following equation:

$$h_{\theta} = q \times \frac{R_{int}}{R_{ext}} \times \frac{1}{(T_{\theta} - T_f)}$$

Where:

$T_{\theta}$  : is the temperature corresponding to the position  $\theta$ .

$T_f$ : the average film temperature ( $T_f=85^{\circ}\text{C}$ )

Establish a table corresponding to the couples ( $\theta, h_{\theta}$ )

2.3. Calculate the absolute error  $\Delta h_{\theta}$  for the position  $\theta = 90^{\circ}$  when the relative errors corresponding to the temperature  $T_{\theta}$  and heat flux  $q$  are 0.1%.  $T_f$  is assumed to be a constant.

2.4. The experimental results show that the variation of the local heat transfer coefficient  $h_{\theta}$  with the angular position  $\theta$  can be expressed by:

$$h_{\theta} = A \times e^{B.\theta}$$

Using the least squares method:

- Say if this equation is acceptable or not?

- Find the best estimation of the parameters A and B.

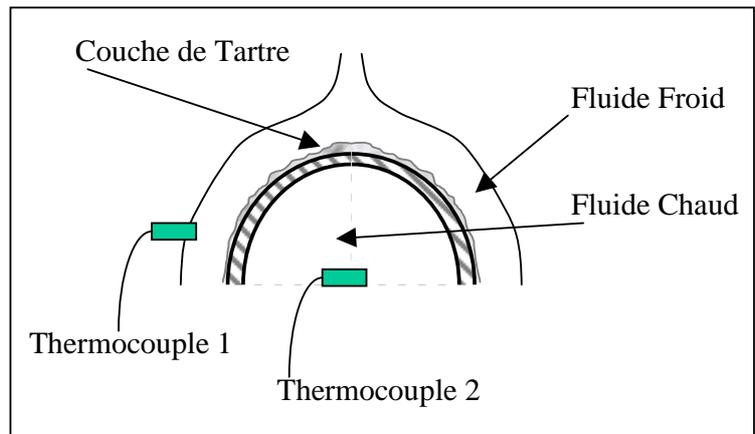
🇬🇧 **PROBLEM 11 ☺ :**

**SCALE MEASUREMENT ON HORIZONTAL TUBE**

During the flow of fluids through heat exchangers (tubes bundle for example) scale layers can be deposited on the exchange surface, causing the drop in heat exchangers performance. Several (direct and indirect) methods can be used to determine the scale layer thickness (Figure 7.17). This allows determining exactly when it is necessary to proceed to an acid cleaning of the exchanger.



(a)



(b)

Figure 7.17 Scale thickness measurements on tubes exchanger  
(a) Direct Measurement, (b) Indirect Measurement

**Part 1: Direct Measurement of scale layer thickness on tubes**

In the case of a direct measurement (Figure 1a), a sensor converts the measured thickness into an electrical signal (voltage U in mV). To calibrate the sensor, one tube is covered with thick metallic sheets with known thickness and use the sensor to measure the voltage output. The results of these measurements are shown in Table 1

- 1.1. What are the input and output signals of the probe?
- 1.2. Using the linear regression method (least square method), can we express the relation between Voltage (U) and thickness (x) by an expression of the form  $U = K x$ ?
- 1.3. If yes, determine the value of K, indicating its unity.
- 1.4. How do we call this parameter K?
- 1.5. What is the order of this sensor?
- 1.6. After a period of 1500 hours of operation of the exchanger, we used two methods (direct and indirect) to measure the thickness. The electronic sensor delivers a voltage of 3.76mV. Determine the corresponding thickness?

Table 7.9: Thickness sensor calibration

Layer thickness in mm	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
Voltage measured by the sensor in mV	0	2,48	4,89	7,62	10,32	12,46	14,98

$$(1) m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} ; (2) b = \frac{\sum y - m \sum x}{n}$$

**Part 2 : Indirect Measurement of the scale layer**

A second method, described as indirect, may be used (Figure 7.17.b). It involves measuring the temperatures on both sides of the exchange surface, than determine the overall heat transfer coefficient by the following equation:

$$Q = U A \Delta T \tag{7.12}$$

Where Q is the heat flux transferred through the exchange surface A. For this experiment, the heat flux was fixed at  $Q = 10000 \text{ W/m}^2$  and the area of the tubes  $A = 10 \text{ m}^2$ .

$\Delta T$ : The difference between the temperature of hot fluid  $T_c$  (inside tubes) and cold  $T_f$  (outside of tubes)

$$\Delta T = T_c - T_f \quad (7.13)$$

Moreover, the coefficient  $U$  depends on the scale thickness  $x$  by the following equation:

$$U = \frac{1}{\left[ \frac{1}{h_o} + (R_o + x) \left[ \frac{1}{R_i h_i} + \left( \frac{1}{k_w} + \frac{1}{k_s} \right) \times \text{Ln} \left( \frac{R_o}{R_i} \right) \right] \right]} \quad (7.14)$$

Where:

Parameters	Signification	Unit	Value
$R_o$	Outlet radius of the tubes	m	0,0287
$R_i$	Inlet radius of the tubes	m	0,028
$h_i$	Inlet Heat Transfer coefficient	W/m <sup>2</sup> .C	5000
$h_o$	Outlet Heat Transfer Coefficient	W/m <sup>2</sup> .C	4202
$k_w$	Thermal conductivity of tube's Material	W/m.C	100
$k_s$	Thermal conductivity of scale	W/m.C	15

Two Thermocouples, type K (Chromel-Alumel), are used to measure temperatures  $T_c$  and  $T_f$ . After an operating period of 1500h and in an ambient temperature of 19 °C, we noted the following values:

- Thermocouple 1 (cold liquid film)  $V_1 = 2.9965$  mV.
- Thermocouple 2 (hot fluid)  $V_2 = 2.259$  mV

The experimenter forgot to bring the cold junction of the second thermocouple in the ice bath.

**Note:** This is the same experience studied in the part I for which we used both direct and indirect methods.

- 2.1. Explain the operating principle of a thermocouple,
- 2.2.
  - a. Why should we put the cold junction of a thermocouple at 0°C?
  - b. Does the error made by the experimenter (leave the cold junction at room temperature) is critical?
  - c. Otherwise, how can we correct it?
- 2.3. Determine the values of the temperatures of hot and cold fluids,
- 2.4. Calculate the overall coefficient of heat transfer  $U$ ,
- 2.5. Deduce the value of the scale thickness  $x$  at that moment,
- 2.6. Compare the results obtained with both measures (Experiments in Parts I and II of the problem).
- 2.7. Based on equation (1) give the expression of the relative error on the overall

heat transfer coefficient

- 2.8. If the errors on the flux  $Q$  is 1% and the temperatures  $T_c$  and  $T_f$  are 0.05% what is the error made on the overall heat transfer coefficient  $U$ ? Comment on this result,
- 2.9. By neglecting other errors, show that the error on the scale thickness  $x$  can be given by the following equation:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta x}{C + x}, \text{ where } C \text{ is a constant} \quad (7.15)$$

## **CORRECTIONS**

---

# 1 ● ANALYSE DIMENSIONNELLE

---

## ▪ EXERCICE 4

$$1. F = \frac{q \times q'}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r^2} \rightarrow \epsilon_0 = \frac{q \times q'}{4 \times \pi \times F \times r^2}$$

$$\text{Ainsi on, on obtient : } [\epsilon_0] = \frac{[q] \times [q']}{[F] \times [r]^2}$$

$$\text{Or } [q] = I \times T \quad ; \quad [F] = M \times L \times T^{-2} ; [r] = L$$

$$\text{Ce qui nous donne : } [\epsilon_0] = \frac{I^2 \times T^2}{M \times L \times T^{-2} \times L^2} = I^2 \times T^4 \times M^{-1} \times L^{-3}$$

$$\text{De même, } \mu_0 = \frac{2 \times \pi \times r \times F}{I \times I \times L}, \text{ ce qui nous donne :}$$

$$[\mu_0] = \frac{[r] \times [F]}{[I] \times [I] \times [L]} = \frac{L \times M \times L \times T^{-2}}{I^2 \times L} = M \times L \times T^{-2} \times I^{-2}$$

2. Pour montrer l'homogénéité de l'équation  $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$  il suffit de vérifier que cette équation est sans dimensions.

$$\text{Or } [\mu_0 \epsilon_0 C] = I^2 \times T^4 \times M^{-1} \times L^{-3} \times M \times L \times T^{-2} \times I^{-2} \times L^2 \times T^{-2} = 1.$$

Donc l'équation est bien homogène.

## 2 ● INCERTITUDES ET CALCUL D'ERREURS

---

### ▪ EXERCICE 2

*Remarque* : les incertitudes des différents termes sont au plus égales à une unité de l'ordre du dernier chiffre inscrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R = (5,1 \pm 0,1) \ \Omega \\ I = (2,2 \pm 0,1) \ A \\ t = (60 \pm 0,1) \ s \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} P = RI^2 \\ P = \frac{W}{t} \end{array} \right.$$

L'énergie thermique dépensée est :  $W = RI^2t$   
 A.N.  $W = 5,1 \times 2,2^2 \times 60 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ J}$

Calcul d'incertitude :

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta(I^2)}{I^2} + \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta T}{T}$$

Ainsi, l'incertitude absolue est déterminée par l'équation suivante :

$$\Delta W = W \times \left[ \frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta T}{T} \right]$$

$$\Delta W = 182 \text{ J} \approx 200 \text{ J}$$

$$\text{D'où } W = (1,5 \pm 0,2) \cdot 10^3 \text{ J}$$

On peut utiliser l'autre formule :  $\Delta Y = \sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$

$$\Delta W = RI^2 \Delta t + I^2 t \Delta R + 2 I \Delta I R t$$

$$\Delta W = RI^2 t \left[ \frac{\Delta t}{t} + I^2 \frac{\Delta R}{\Delta R} + 2 \frac{\Delta I}{I} \right]$$

▪ **EXERCICE 4**

L'erreur effectuée sur la première mesure est de :

$$\Delta T_1 = \frac{5 \times 1}{100} = 0.05^\circ\text{C}$$

En ce qui concerne la deuxième mesure, elle est de:

$$\Delta T_2 = \frac{20 \times 1}{100} = 0.2^\circ\text{C}$$

L'erreur probable sur la différence est:

$$\Delta T = \sqrt{\Delta T_1^2 + \Delta T_2^2} = 0.2^\circ\text{C}$$

Par rapport à l'étendue du thermomètre cette erreur représente:

$$\frac{\Delta T}{\text{Etendue}} = \frac{0.2}{50} \times 100 = 4\%$$

▪ **EXERCICE 7**

1.

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$dn = \frac{\partial n}{\partial D_m} dD_m + \frac{\partial n}{\partial A} dA$$

$$dn = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}} dD_m + \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos \frac{A + D_m}{2} \sin \frac{A}{2} - \sin \frac{A + D_m}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin^2 \left( \frac{A}{2} \right)} \right] dA$$

$$dn = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}} dD_m - \frac{\sin \left( \frac{D_m}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{A}{2} \right)} dA \right]$$

$$\Delta n = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \Delta D_n + \frac{\sin \left( \frac{D_m}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{A}{2} \right)} \Delta A \right]$$

2. Application numérique

$$\Delta n = \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos \frac{100'}{2}}{\sin \frac{60'}{2}} 2' + \frac{\sin \left( \frac{40'}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{60'}{2} \right)} 1' \right] = 0.044$$

### EXERCICE 9

1.  $g = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2}$  d'où :

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln L - 2 \ln T$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2 \frac{dT}{T}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T}$$

$$\Delta g = g \times \left[ \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T} \right] = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2} \times \left[ \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T} \right]$$

2.  $t = N \times T$

Soit  $\Delta t_e$  et  $\Delta t_d$  les erreurs d'enclenchement et de déclenchement du chronomètre,

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_e^2 + \Delta t_d^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} = \sqrt{0,02} = 0,14s$$

$$T = \frac{t}{N} \text{ ainsi : } \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} = 1\% \text{ d'où } t = \frac{\Delta t}{0,01} = 100 \times \Delta t = 14,14s$$

3.  $T = \frac{t}{N} = \frac{t}{22} = 0,64s$

5.  $g = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2} = 10,04s$

$$\Delta g = g \times \left[ \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T} \right] = 0,208m.s^{-2} \text{ d'où } g = 9,96 \pm 0,21m.s^{-2}$$

▪ **EXERCICE 10**

1.  $V = \sqrt{g \times L \times (1 - \cos \theta)}$  d'où :

*1<sup>ere</sup> méthode* (Logarithme)

$$\ln V = \frac{1}{2} [\ln g + \ln L + \ln(1 - \cos \theta)]$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{2} \left[ \frac{dg}{g} + \frac{dL}{L} + \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} d\theta \right]$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} \Delta \theta \right]$$

*2<sup>eme</sup> méthode* (Différentielle)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial g} dg + \frac{\partial V}{\partial L} dL + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta$$

$$dV = \frac{L(1 - \cos \theta)}{2\sqrt{gL(1 - \cos \theta)}} dg + \frac{g(1 - \cos \theta)}{2\sqrt{gL(1 - \cos \theta)}} dL + \frac{\sin \theta}{2\sqrt{gL(1 - \cos \theta)}} d\theta$$

Or  $V = \sqrt{g \times L \times (1 - \cos \theta)}$

D'où

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{2} \left[ \frac{dg}{g} + \frac{dL}{L} + \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} d\theta \right]$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)} \Delta \theta \right]$$

2.  $V = 0,38 \text{ m.s}^{-1}$

D'où,  $\Delta V = 0,01 \text{ m.s}^{-1}$

▪ **EXERCICE 12**

$$T = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 1,000\text{m} \pm 0,001\text{m} \\ g = 9,8\text{N/kg} \pm 0,01\text{N/kg} \end{array} \right\}$$

$$\text{AN} . T = 2,007 \text{ s}$$

$$\text{Calcul d'incertitude : } \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \Rightarrow \Delta T = \frac{T}{2} \left[ \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} \right]$$

$$\text{AN : } T = \frac{2,007}{2} \left[ \frac{0,001}{1} + \frac{0,01}{9,8} \right] = 0,002\text{s}$$

$$T = (2,007 \pm 0,002) \text{ s}$$

✓ Autre Méthode pour le calcul de  $\Delta T$

$$T_{\max} = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{l_{\max}}{g_{\min}}} ; \text{AN. } T_{\max} = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{1,001}{9,79}} = 2,009 \text{ s}$$

$$T_{\min} = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{l_{\min}}{g_{\max}}} ; \text{AN. } T_{\min} = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{0,999}{9,81}} = 2,005 \text{ s}$$

$$\Delta T = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = 0,002 \text{ s}$$

✓ Autre méthode

$$\Delta T = 2\pi \left[ \left[ \frac{1/2}{\sqrt{g \cdot l}} \right] \Delta l + \left[ \frac{\sqrt{l}}{2g\sqrt{g}} \right] \Delta g \right]$$

$$\Delta T = T \left[ \frac{\Delta l}{2 \cdot l} + \frac{\Delta g}{2 \cdot g} \right] = \frac{T}{2} \left[ \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} \right]$$

▪ **EXERCICE 13**

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{1}{2} \frac{\Delta(R^2 + L^2 \omega^2)}{R^2 + L^2 \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta(R^2)}{R^2 + L^2 \omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta(L\omega)^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

En utilisant le principe suivant :

$$Y = X_1.X_2 \rightarrow \Delta Y = Y \left( \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2} \right), \text{ nous obtenons :}$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{R\Delta R}{R^2 + L^2\omega^2} + \frac{(L\omega)^2 \left( \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta\omega}{\omega} \right)}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{R\Delta R}{R^2 + L^2\omega^2} + \frac{L\omega^2\Delta L}{R^2 + L^2\omega^2} + \frac{L^2\omega\Delta\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$\Delta Z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta R + \frac{L\omega^2}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta L + \frac{L^2\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta\omega$$

✓ Autre méthode

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$\Delta Z = \frac{2R}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta R + \frac{2L\omega^2}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta L + \frac{2L^2\omega}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta\omega$$

$$\Delta Z = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta R + \frac{L\omega^2}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta L + \frac{L^2\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Delta\omega$$

▪ EXERCICE 17 :

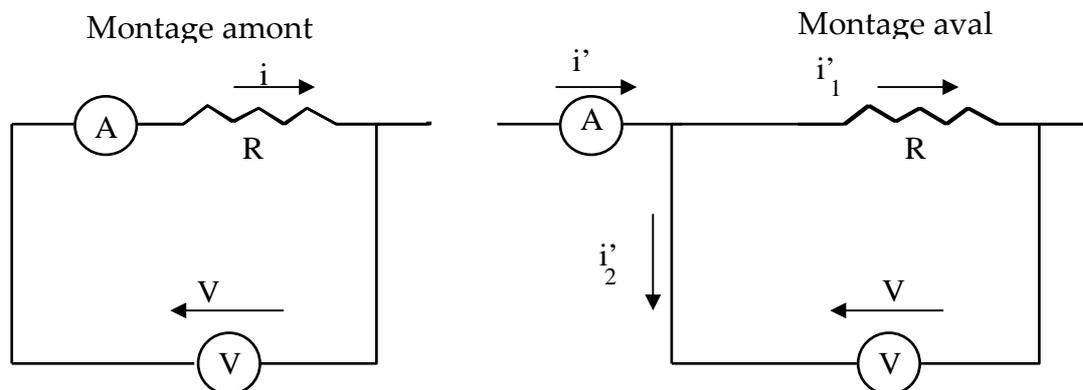


Figure C.2.1. Montages pour la mesure d'une résistance

Les deux montages donnent une erreur sur la mesure :

- Rappel loi d'Ohm :  $R = \frac{U}{I}$

- Montage amont :  $R = \frac{U_{mes}}{I_{mes}}$  ?, la valeur de la résistance est inconnue !!!

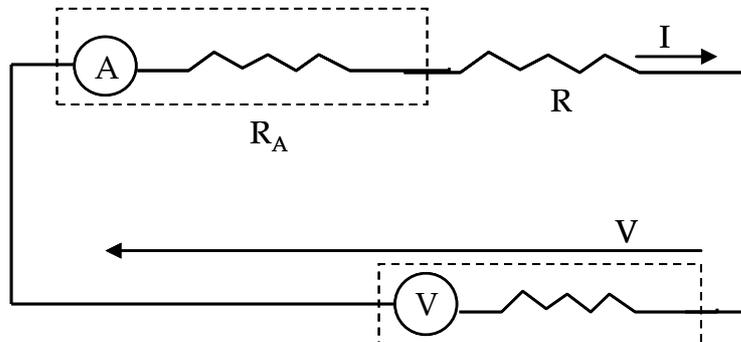


Figure C.2.5.

Le voltmètre est branché aux bornes de l'Ampèremètre et de la Résistance. Il y a donc erreur systématique due à la résistance de l'ampèremètre  $R_A$

**Remèdes** :  $R_{mes} < R$ , il faut apporter une correction  $\delta R = R - R_{mes}$

Si  $R_{mes} \ll R_v \rightarrow R = R_{mes} \left( 1 + \frac{R_{mes}}{R_v} \right)$

$\Delta R_{mes} = \frac{R_{mes}^2}{R_v} R \Rightarrow \frac{\Delta R_{mes}}{R_{mes}} = \frac{R_{mes}}{R_v}$

$R_{mes}$  est petite devant la résistance du voltmètre  $R_v$ , alors le montage aval convient pour la mesure des résistances de valeurs plus petites que  $R_v$

C.L

- Si  $\frac{R}{R_v} < R_A < R$  ou  $R^2 < R_A R_v$  ou  $R < \sqrt{R_A R_v}$  on adopte le montage aval

- Si  $\frac{R}{R_v} > \frac{R_A}{R}$  ou  $R^2 > R_A R_v$  ou  $R > \sqrt{R_A R_v}$  on adopte le montage amont

- Si  $R = \sqrt{R_A R_v}$  les deux méthodes sont équivalentes

▪ **EXERCICE 20 : EFFET HALL**

$$V_H = K_H I B \sin\theta$$

$$\ln V_H = \ln K_H + \ln I + \ln B + \ln \sin\theta$$

$$\frac{dV_H}{V_H} = \frac{dI}{I} + \frac{dB}{B} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{dI}{I} + \frac{dB}{B} + \frac{1}{\tan\theta} d\theta$$

Pour  $\theta \approx 0$   $\tan\theta \approx \theta$

Ce qui nous donne :

$$\frac{dV_H}{V_H} = \frac{dI}{I} + \frac{dB}{B} + \frac{d\theta}{\theta}$$

Ainsi :

$$\frac{\Delta V_H}{V_H} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta\theta}{\theta} = 1 + 2 + 3 = 6\%$$

✱ **EXERCICE 21 : MESURE DE L'HUMIDITE DE L'AIR**

$$1. P_v = \left( \frac{r}{0.622 + r} \right) \times P$$

$$\frac{P_v}{P} = \left( \frac{r}{0.622 + r} \right) \rightarrow r = \frac{0.622 \cdot P_v}{P - P_v}$$

$$\text{A.N. } r = \frac{0.622 \times 1}{0.9} = 0.69 \text{ kg/kg}$$

$$2. \ln r = \ln 0.622 + \ln P_v - \ln(P - P_v)$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{dP_v}{P_v} - \frac{dP}{P - P_v} + \frac{dP_v}{P - P_v} = \frac{P}{P - P_v} \frac{dP_v}{P_v} - \frac{dP}{P - P_v}$$

D'où :

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{P}{P - P_v} \frac{\Delta P_v}{P_v} + \frac{\Delta P}{P - P_v} = \frac{P}{P - P_v} \frac{\Delta P_v}{P_v} + \frac{P}{P - P_v} \frac{\Delta P}{P}$$

A.N.

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{0.9} 0.02 + \frac{1}{0.9} 0.02 = \frac{0.04}{0.9} = 4.44\%$$

$$\Delta r = 0,044 \times 0,069 = 0,0031 \text{ kg/kg}$$

Finalemment :  $r = 0,069 \pm 0,003 \text{ kg/kg}$

✱ **EXERCICE 23**

$$1. V = (h_2 - h_1) \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$V = (3 - 2) \times \pi \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi = 3,14 \text{ m}^3$$

$$Q_v = \frac{V}{t} = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$2. \text{Ln}V = \text{Ln}(h_2 - h_1) + \text{Ln}\pi + 2\text{Ln}d - \text{Ln}4$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dh_2}{(h_2 - h_1)} - \frac{dh_1}{(h_2 - h_1)} + 2 \frac{dD}{D}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h_2}{(h_2 - h_1)} + \frac{\Delta h_1}{(h_2 - h_1)} + 2 \frac{\Delta D}{D}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h_1}{h_1} \frac{h_1}{(h_2 - h_1)} + \frac{\Delta h_2}{h_2} \frac{h_2}{(h_2 - h_1)} + 2 \frac{\Delta D}{D}$$

$$\text{Or } \frac{\Delta h_1}{h_1} = \frac{\Delta h_2}{h_2} = \frac{\Delta D}{D} = 1\% = \varepsilon$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon \times \left( \frac{h_1}{(h_2 - h_1)} + \frac{h_2}{(h_2 - h_1)} + 2 \right)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 0,01 \times \left( \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + 2 \right) = 0,07 = 7\%$$

$$\text{Ainsi } \Delta V = 0,07 \times \pi = 0,22 \text{ m}^3$$

▪ **EXERCICE 24**

1. La puissance transférée dans cet échangeur est donnée par la relation suivante:

$$Q = \dot{m} \times C_p \times (T_s - T_e) = \frac{360}{3600} \times 4180 \times 10 = 4180 \text{ W}$$

2. L'erreur sur le flux est déterminée de la façon suivante:

$$\ln Q = \ln \dot{m} + \ln C_p + \ln(T_s - T_e)$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \frac{dT_s}{T_s - T_e} - \frac{dT_e}{T_s - T_e}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}} + \frac{\Delta T_s}{T_s - T_e} + \frac{\Delta T_e}{T_s - T_e}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 0,01 + 0,1 + 0,1 = 0,21 = 21\%$$

$$\Delta Q = 0,21 \times 4180 = 877,8 \text{ W}$$

Ainsi on obtient:  $Q = 4180 \pm 877,8 \text{ W}$

▪ **EXERCICE 25**

1. La relation donnant  $V_{\text{mes}}$  peut être obtenue par deux méthodes : la première se base sur l'équation de Thevenin et la deuxième sur la loi des mailles.

1<sup>ère</sup> méthode : Equation de Thevenin

$$V_{BD} = V_g \frac{R_4}{R_3 + R_4} ; \quad V_{AD} = V_g \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La f.e.m du générateur de Thevenin est :

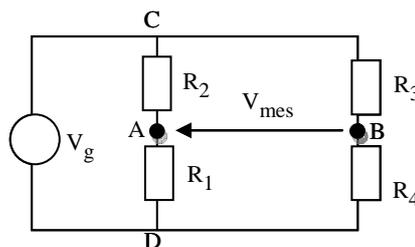


Figure C.2.7. Pont de Wheatstone

$$E_T = V_{BA} = V_g \cdot \left( \frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

D'où :

$$V_{\text{mes}} = V_{AB} = V_g \cdot \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

2<sup>eme</sup> méthode : Loi des mailles

On peut définir comme indique dans la figure C.2.7 deux mailles parcourues par des intensités  $i_1$  et  $i_2$ . Ainsi, on peut écrire :

$$\text{Maille 1. } V_g = (R_1 + R_2) \times i_1 \rightarrow i_1 = \frac{V_g}{(R_1 + R_2)}$$

$$\text{Maille 2. } V_g = (R_3 + R_4) \times i_2 \rightarrow i_2 = \frac{V_g}{(R_3 + R_4)}$$

$$V_{\text{mes}} = V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_B) = R_2 \times i_1 - R_4 \times i_2$$

$$V_{\text{mes}} = R_2 \frac{V_g}{(R_1 + R_2)} - R_4 \frac{V_g}{(R_3 + R_4)} \quad \text{Ainsi :}$$

$$V_{\text{mes}} = V_{AB} = V_g \cdot \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

$$2. V_{\text{mes}} = 0 \rightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad \text{Ce qui donne : } R_1 R_3 = R_2 R_4$$

$$3. V_{\text{mes}} = V_g \cdot \left( \frac{2R_2}{3R_2} - \frac{R_4}{2R_4} \right) = \frac{1}{6} V_g \rightarrow \frac{dV_{\text{mes}}}{V_{\text{mes}}} = \frac{dV_g}{V_g} = 1\%$$

#### ▪ EXERCICE 26

$$1. t_1 = \frac{L}{c+v}; \quad t_2 = \frac{L}{c-v};$$

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{c-v} - \frac{L}{c+v} = \frac{L(c+v) - L(c-v)}{(c-v)(c+v)}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{Lc + Lv - Lc + Lv}{c^2 - v^2} = \frac{2Lv}{c^2 - v^2}$$

Or  $v \ll c$  donc  $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2Lv}{c^2}$

En conclusion :  $v = \frac{c^2}{2 \times L} \times \Delta t$

2. AN:  $v = \frac{1500^2 \times 3.10^{-6}}{2 \times 10^{-2}} = 337,5 \text{ m.s}^{-1}$

3.  $\Delta t = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} \cdot 10^{-2} = \sqrt{34} \cdot 10^{-2} \mu\text{s}$

4.  $v = \frac{c^2}{2 \times L} \times \Delta t$

$$\text{Ln}v = \text{Lnc}^2 + \text{Ln}\Delta t - \text{Ln}2L$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\Delta t}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \Delta v = \frac{337,5 \times \sqrt{34} \cdot 10^{-8}}{3.10^{-6}} = 6,56 \text{ m.s}^{-1}$$

### 3 ● TRAITEMENTS STATISTIQUES

#### Partie 1 : Traitements Statistiques simples

##### EXERCICE 2

1. On classe les données dans un ordre croissant :

Tableau C.3.1. Données classées par ordre croissant

Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3
118,8	119,6	120,4
118,9	119,6	120,4
118,9	119,8	120,6
118,9	119,9	120,8
119,4	119,9	120,9
119,4	120,1	121
119,6	120,2	121

La moyenne est donnée par:  $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^{21} T_i}{21} = 119,91^\circ\text{C}$

La Médiane =  $T_{11} = 119,9^\circ\text{C}$

Pour calculer le mode, on est ramené à faire une répartition en classe :

Nombre de classe  $\approx \sqrt{21} \approx 5$

Tableau C.3.2. Distribution Statistique et calcul de fréquences

Classes	N.obs	Freq. relative
]118,5-119]	4	0,19
]119-119,5]	2	0,10
]119,5-120]	6	0,29
]120-120,5]	4	0,19
]120,5-121]	5	0,24

$$\text{Mode} = \frac{119,5 + 120}{2} \approx 119,75\text{C}$$

On Remarque que Mode  $\approx$  Moyenne  $\approx$  Médiane, donc la distribution suit la loi de Gauss et le nombre d'observations peut être considéré comme satisfaisant.

$$2. \quad s_T = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - T)^2} = 0,72^\circ\text{C}$$

$$3. \quad \Delta T = \frac{s_T}{\sqrt{n}} = \frac{0,72}{\sqrt{21}} = 0,16^\circ\text{C}, \text{ d'où on peut \acute{e}crire : } T = 119,91 \pm 0,16^\circ\text{C}$$

4. La distribution de la temp\erature est la suivante :

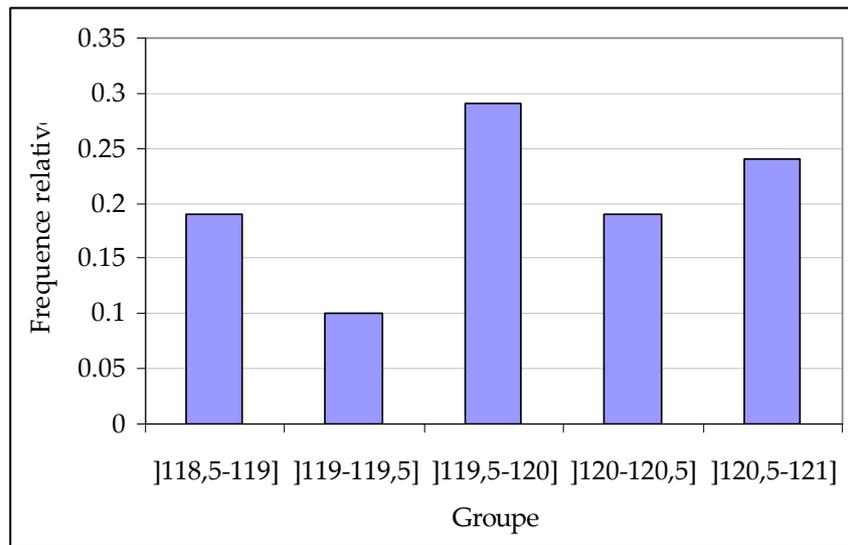


Figure C.3.1. Distribution statistique de la population

## EXERCICE 10

1. Les valeurs moyennes sont:

$$\text{- pour le diam\etre: } \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^5 d_i}{5} = 18,48\text{mm}$$

$$\text{- pour le nombre de Reynolds: } \bar{Re} = \frac{\sum_{i=1}^n Re_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^5 Re_i}{5} = 2131$$

$$\text{- pour le nombre de Prandtl: } \bar{Pr} = \frac{\sum_{i=1}^n Pr_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^5 Pr_i}{5} = 1,14$$

3. Pour le calcul d'erreurs, utilisons les \acute{e}quations suivantes:

$$\text{- pour le diam\etre: } \Delta d = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (d_i - \bar{d})^2}}{\sqrt{5}} = 0,06\text{mm}$$

- pour le nombre de Reynolds:

$$- \Delta Re = \frac{s_{Re}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Re_i - \overline{Re})^2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (Re_i - \overline{Re})^2}}{\sqrt{n}} = 9,54$$

- pour le nombre de Prandtl:

$$- \Delta Pr = \frac{s_{Pr}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Pr_i - \overline{Pr})^2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (Pr_i - \overline{Pr})^2}}{\sqrt{n}} = 0,05$$

4. La valeur moyenne du coefficient de transfert de chaleur est donne par :

$$\bar{h} = 0,023 \times \frac{\lambda}{d} \times \overline{Re}^{0,8} \times \overline{Pr}^{1/3} = 239,92 \text{ W/m}^2\text{C}$$

5. Pour le calcul d'erreur, nous pouvons utiliser la méthode suivante :

$$h = 0.023 \times \frac{\lambda}{D} \times Re^{0,8} \times Pr^{1/3}$$

$$\text{Ln}h = \text{Ln}0.023 + \text{Ln}\lambda - \text{Ln}D + 0,8\text{Ln}Re + \frac{1}{3}\text{Ln}Pr$$

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dD}{D} + 0,8 \frac{dRe}{Re} + \frac{1}{3} \frac{dPr}{Pr}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta D}{D} + 0,8 \frac{\Delta Re}{Re} + \frac{1}{3} \frac{\Delta Pr}{Pr}$$

$$\text{A.N. : } \frac{\Delta h}{h} = \frac{0,06}{18,48} + 0,8 \frac{9,54}{2131} + \frac{1}{3} \frac{0,05}{1,14} = 0,022 = 2,2\%$$

Ainsi, nous obtenons :  $\Delta h = 5,18 \text{ W/m}^2\text{C}$

6. Finalement, le coefficient de transfert de chaleur s'écrit sous la forme :

$$h = 339,29 \pm 5,18 \text{ W/m}^2\text{C}$$

▪ EXERCICE 21

1. Le principe de la méthode des moindres carrés est le suivant :

Soit un nombre de points expérimentaux, déterminons la droite qui minimise la somme des erreurs (écart entre la valeur mesurée et la valeur prédite par la droite) :

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2$$

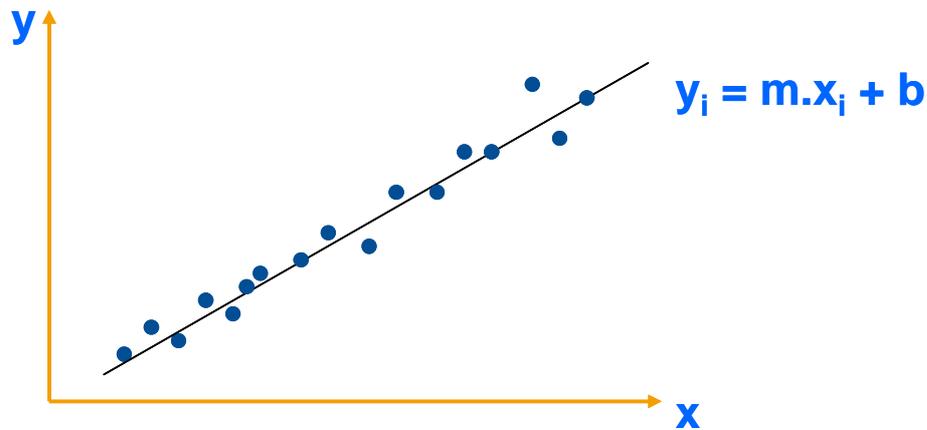


Figure C.3.2. Principe de la méthode des moindres carrés (régression linéaire)

2. Démontrons les relations :

$$(1) m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} ; (2) b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} \quad (3.7)$$

L'erreur global est ainsi donnée par :  $\Delta^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2$

Il s'agit d'une fonction convexe dépendant des deux paramètres m et b.

Cette fonction atteint son minimal quand son gradient est nul, c-a-d :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta^2}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta^2}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] = 0 \\ -2 \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) \times x_i \right] = 0 \\ -2 \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) \times 1 \right] = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système avec les inconnus m et b donne les équations (1) et (2)

2. D'après la figure, nous avons :

$$V_0 = R_s i + b$$

En utilisant la relation de la méthode des moindres carrées, nous obtenons :

$$R_s = \frac{\sum i_i \sum V_{0,i} - 5 \sum i_i V_{0,i}}{(\sum i_i)^2 - 5 \sum i_i^2} = 35,12 \Omega$$

4. Le décalage par rapport à zéro du voltmètre est:

$$b = \frac{\sum V_{0,i} - 5 \sum i_i}{5} = 0,15 \text{ mV}$$

5. La sensibilité du système de mesure est S.

Or on a  $i = S_i \times T$  avec  $S_i = 1 \mu\text{A/K}$

Et  $V_0 = S \times T + b = R_s \times i + b = R_s \times S_i \times T + b$  d'où  $S = R_s \times S_i = 35,12 \mu\text{V/K}$

6. La résolution du voltmètre est  $\Delta V_0 = 0,1 \text{ mV}$ ,

$$\Delta T = \frac{\Delta V_0}{S} = \frac{0,1}{0,035} = 2,48 \text{ K}$$

$$7. T = \frac{V_0 - b}{S}$$

Pour le domaine de mesure (Range) du voltmètre, il est de 0,0 à 15,0 mV, l'étendu est alors de : [-4,35 K ; 422,80 K]

▪ **EXERCICE 22**

Faisons le changement de variable suivant :

$$\ln U = \ln a + b \ln T$$

Posons :  $y = \ln U$  ;  $x = \ln T$  et  $c = \ln a$

L'équation devient :  $y = b x + c$

Nous obtenons ainsi le tableau suivant :

*Tableau C.3.3. Changement de variables applique aux données*

$x = \ln T$	$y = \ln U$
3.00	0.32
3.22	0.87
3.40	1.13
3.56	1.29
3.69	1.37
3.81	1.54
3.91	1.72
4.09	1.98
4.25	2.11
4.32	2.24

1. A partir de la méthode de la régression linéaire, nous obtenons:

$$b = m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

$$c = "b" = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

$$b=1,34 \text{ et } c= \ln a = -3,535$$

$$\text{D'où } a = 0,03$$

$$\text{Ainsi, nous aurons: } U = 0,03 \times T^{1,34}$$

2 .  $\rho^2 = 0,98$  d'où la corrélation est bonne

$$\rho^2 = 1 - \frac{n-1}{n-2} \frac{[y^2 - m[xy]]}{[y^2]}$$

$$[y^2] = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} ; [xy] = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}$$

✱ **EXERCICE 24**

1. L'étalonnage consiste à déterminer des valeurs de l'output d'un instrument pour des valeurs constantes de l'input.

$$2. R = R_0 \exp \left[ \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

$$\ln R = \ln R_0 + \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

Faisons le changement de variable suivant :  $y = \ln R$ ,  $x = \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$  et  $b = \ln R_0$

Ainsi, la relation devient linéaire :  $y = \beta x + b$ .

Avec ce changement de variable, nous obtenons :

Tableau C.3.4. Changement de variables appliqué aux données

T(°C)	23	30	35	40	45	50	55	60
R(Ω)	5000	3950	365	2890	2500	2150	1860	1630
T(K)	296	303	308	313	318	323	328	333
X	0	-8E-5	-1E-4	-2E-4	-2E-4	-3E-4	-3E-4	-4E-4
Y	8,5	8,3	8,1	8,0	7,8	7,7	7,5	7,4

En appliquant la méthode de régression linéaire (moindres carrées) :

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

et

$$b = \frac{\sum y - m \sum x}{n} = \frac{\sum x \sum xy - \sum x^2 \sum y}{(\sum x)^2 - n \sum x^2}$$

Nous obtenons:  $\beta = 2985,6$  K,  $b = 8,52$  e  $\rho^2 = 0,9999$

▪ **EXERCICE 26**

$$1. v = \frac{c^2 \times \Delta t}{2 \times L \times \cos \theta}$$

$$\text{A.N : } v = \frac{1000^2 \times (4.34 - 1.04) \cdot 10^{-6}}{2 \times 2 \cdot 10^{-2} \times \cos 45} = 116,67 \text{ m.s}^{-1}$$

$$2 \Delta t = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2} = \sqrt{0,03^2 + 0,02^2} = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

3

$$v = \frac{c^2 \times \Delta t}{2 \times L \times \cos \theta}$$

$$\text{Ln}v = \text{Lnc}^2 + \text{Ln}\Delta t - \text{Ln}2 - \text{Ln}L - \text{Ln}\cos \theta$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\Delta t}{\Delta t} - \frac{dL}{L} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta \Delta t}{\Delta t} + \frac{\Delta L}{L} + \text{tg}\theta \cdot \Delta \theta$$

AN

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{3,6 \cdot 10^{-8}}{3,3 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-2}} + 1,0,01 \times \frac{\pi}{180} = 0,016 = 1,6\%$$

$$\Delta v = 1,87 \text{ m.s}^{-1}$$

4. Pour les différentes valeurs, calculons  $\cos \theta$  et  $\Delta T$

Tableau C.3.5. Changement de variables applique aux données

<b>Cos <math>\theta^\circ</math></b>	<b><math>\Delta T(\mu\text{s})</math></b>
1	1.32
0.984	1.21
0.939	1.12
0.866	1.06
0.766	0.89
0.642	0.76
0.500	0.67
0.342	0.39
0.173	0.23
6.12574E-17	0.01

En traçant cette courbe nous obtenons :

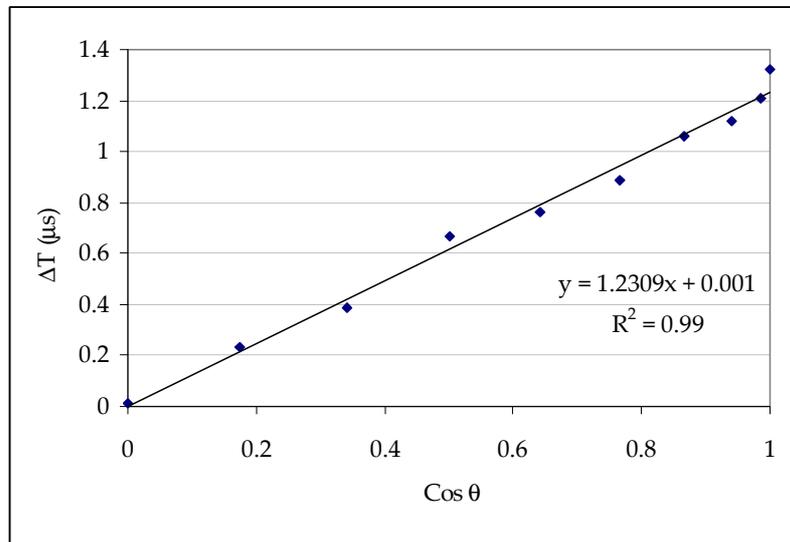


Figure C.3.3. Variation de  $\Delta T$  en fonction de  $\cos \theta$ , et application de la méthode des moindres carrées

2. D'après la méthode de la régression linéaire, nous avons :  $m = 1,2309$

$$\frac{2}{c^2} \frac{L}{v} = 1,2309 \rightarrow v = \frac{1,2309 \times c^2}{L} = \frac{1,2309 \times 1000^2}{L} = 6,15 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

3.  $\rho^2 = 0,99 \cong 1$ , Donc la régression est bonne

4. L'erreur systématique est l'écart par rapport à Zéro (Zero drift) =  $b = 0,001 \mu\text{s}$ .

## 4 ● CARACTERISTIQUES DES CAPTEURS

---

- **EXERCISE 3**

$$R = R_0 (1 + \alpha T) \text{ soit } dR/dT = R_0 \alpha = 0,39 \Omega/K \text{ (uSI)}$$

$$R_{100} = 139 \Omega \text{ et } \Delta R/R = 0,1\% \rightarrow \Delta R = 0,139 \Omega$$

$$\Delta T = 0,139/0,39 = 0,356^\circ\text{C} \approx 0,4^\circ\text{C}$$

## 5 • MESURE DE TEMPERATURE

### 5.1. LAME BIMETALIQUE

#### EXERCICE 2

1. Quand la température augmente les deux barres se dilatent. Etant donné que les coefficients de dilatation sont différents, l'allongement des deux barres n'est pas le même, d'où une courbure. .

2.

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$$

$$\Delta l_1 = \alpha_1 \cdot l_0 \cdot \Delta T = 17,3 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 110 = 0,057 \text{ cm}$$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 \cdot l_0 \cdot \Delta T = 1,1 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 110 = 0,0036 \text{ cm}$$

$$3. r_h = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{5} = 0,2; r_e = \frac{E_2}{E_1} = \frac{145}{193} = 0,75; h = h_1 + h_2 = 6 \text{ mm}$$

$$\rho = \frac{\left[ 3 \times (1 + 0,2)^2 + (1 + 0,2 \times 0,75 r_e) \left( 0,2^2 - \frac{1}{0,2 \times 0,75} \right) \right] \times 6 \cdot 10^{-3}}{6 \times (17,3 - 1,1) \times 10^{-6} \times (1 + 0,2) \times (120 - 10)} = -1,25 \text{ m}$$

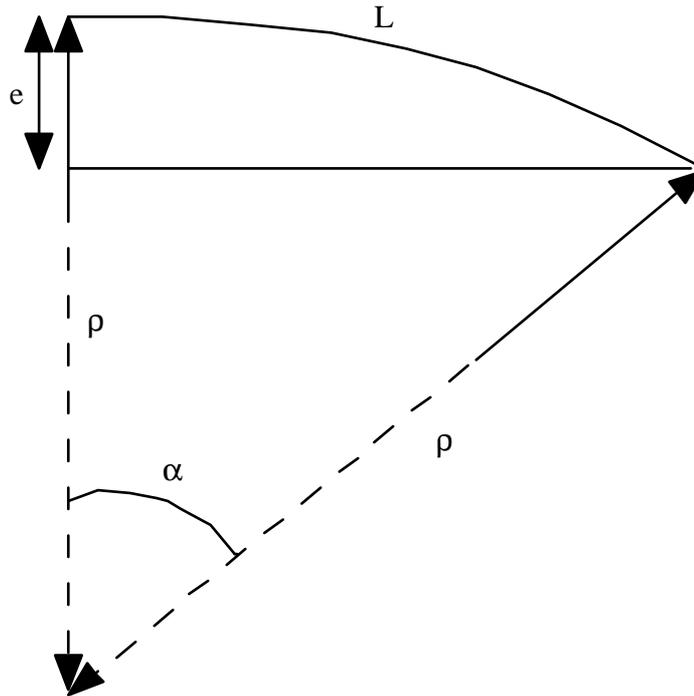
$$4. \rho = \frac{K}{\Delta T} \text{ avec } k = -138,164$$

$$\rho = \frac{K}{(T - T_0)} \Rightarrow d\rho = - \frac{K}{(T - T_0)^2} dT \Rightarrow \Delta\rho = \frac{K}{(T - T_0)^2} \Delta T$$

$$d'où S(T) = \frac{\Delta\rho}{\Delta T} = \frac{K}{(T - T_0)^2} = -0,01 \text{ m}/^\circ\text{C}$$

$$5. \text{Résolution} = \Delta T_{\min} = \frac{(T - T_0)^2}{K} \Delta\rho_{\min} = 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}$$

$$6. L(T) = \frac{L_1 + L_2}{2} = 30,03 \text{ cm} .$$



$$L(T) = \rho(T) \times \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{L(T)}{\rho(T)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\rho(T) - e}{\rho(T)} \Rightarrow e = \rho(T) (1 - \cos \alpha) = \rho(T) \left( 1 - \cos \frac{L(T)}{\rho(T)} \right)$$

$$\text{pour } T = 120^\circ\text{C}; e = -1.25 \left( 1 - \cos \frac{0.3}{1.25} \right) = -0.03 \text{ m}$$

$$7. e = \rho \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) \right)$$

$$de = \frac{\partial e}{\partial L} dL + \frac{\partial e}{\partial \rho} d\rho$$

$$de = \rho \left( \frac{1}{\rho} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) dL + \left[ \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) - \rho \left( \frac{L}{\rho^2} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) \right] d\rho$$

$$de = \left( \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) dL + \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) - \frac{L}{\rho} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) d\rho$$

$$\Delta e = \left( \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) \Delta L + \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) - \frac{L}{\rho} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) \Delta \rho$$

$$\Delta e = 3.10^{-4} \text{ m}$$

## 5.2. RESISTANCE TEMPERATURE DETECTOR (PT100)

### EXERCICE 6

1. Les niveaux de la température de chaque sonde sont déterminés à partir de l'équation 5.5.

$$R = R_0 \times [1 + 0,00385 \times T]$$

$$T = \frac{\frac{R}{R_0} - 1}{0.00385} = 2,597R - 259,74$$

Les valeurs obtenues sont récapitulées dans le tableau suivant :

Tableau C.5.1. Variation de la résistance en fonction de la température

Couche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resistance ( $\Omega$ )	107,7	107,09	108,47	111,17	113,09	117,33	120,41	121,56	122,33	123,1
Température T ( $^{\circ}\text{C}$ )	20	18,41	22	29	34	45	53	56	58	60

2. Traçons la courbe  $T = f(Z)$

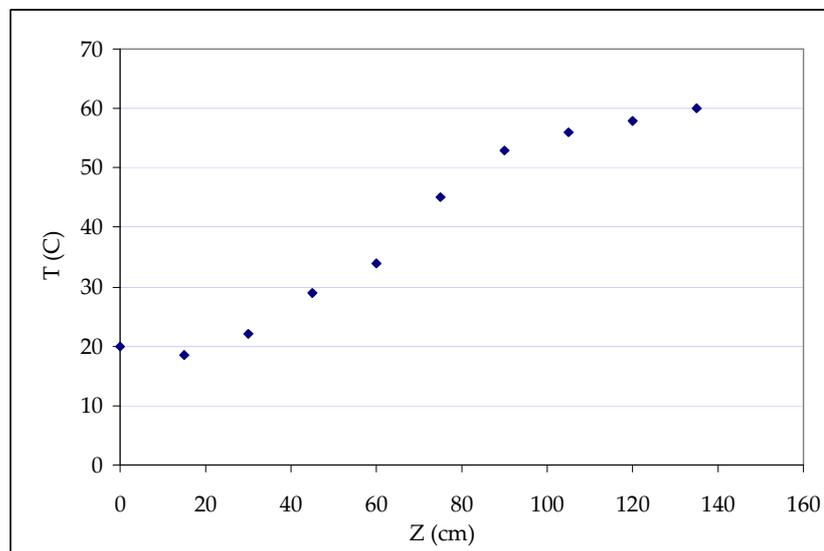


Figure C.5.1. Variation de la température en fonction de Z

3. On remarque que la résistance varie de manière linéaire avec la température ( $\rho^2=1$ ), la sensibilité est égale à :  $2,457 \Omega/\text{C}$  et le décalage au zéro est de  $-240,83 \Omega$

### 5.3. THERMISTANCE

#### ▪ EXERCICE 10

On sait que :

$$R = R_0 \times \exp \left[ \beta \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

D'où

$$T = \frac{1}{\left[ \frac{1}{\beta} \ln \frac{R}{R_0} + \frac{1}{T_0} \right]}$$

Ainsi, pour  $R = 100 \Omega$ , on a  $T = 375,54 \text{ K}$

On a aussi,

$$\Delta T = \frac{T^2 \Delta R}{\beta R}$$

D'où, pour  $\Delta R = 5 \Omega$ , on obtient  $\Delta T = 0,21 \text{ K}$

En conclusion,

$$T = 375,54 \pm 0,21 \text{ K}$$

2. La résolution est déterminée par la relation suivante :

$$\Delta T = \frac{T^2 \Delta R}{\beta R}$$

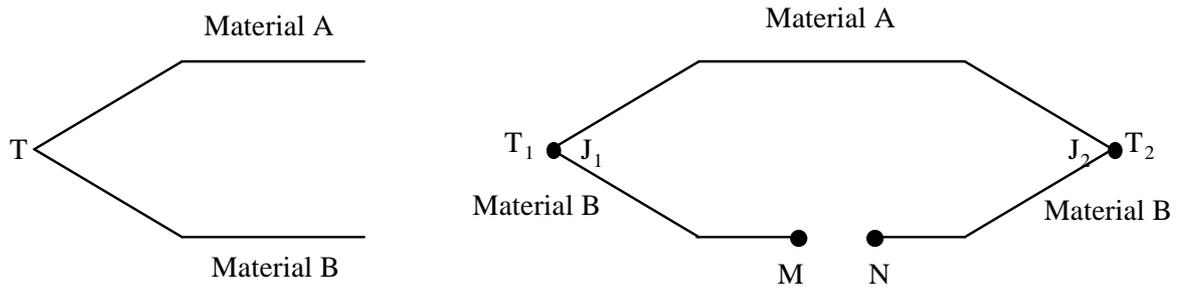
Pour  $T = 320 \text{ K}$ , on a  $R = 2676,31 \Omega$  donc  $\Delta T = 0,13 \text{ K}$

Pour  $T = 600 \text{ K}$ , on a  $R = 33,69 \Omega$ , donc  $\Delta T = 35,62 \text{ K}$

### 5.4. THERMOCOUPLES

#### ▪ EXERCICE 13

1. Un thermocouple est une jonction entre deux métaux différents délivrant une tension (f.e.m) lorsque les deux jonctions sont portées à deux températures différentes.



$$V_0 = C_1 \times (T_1 - T_2) + C_2 \times (T_1^2 - T_2^2)$$

Figure C.5.2. Principe de fonctionnement d'un thermocouple

Un thermocouple fonctionne par *l'effet Seebeck* : C'est l'effet par lequel les électrons excités par la chaleur vont se déplacer de la région chaude vers la région froide

2. La température peut être mesurée par différents types de capteur en se basant sur la mesure d'une caractéristique physique variant avec la température (longueur, résistance électrique, masse volumique, etc.). On peut citer comme exemples :

- Thermomètre avec un réservoir en liquide (dilatation)
- Bilame métallique : rayon de courbure varie avec la température
- La RTD "Résistance Temperature Sensor" (PT100) et la thermistance donnant une variation de la résistance en fonction de la température, respectivement, suivant les lois :

- RTD:  $R = R_0 (1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \gamma_3 T^3 + \dots + \gamma_n T^n)$

Où  $R_0$  est la valeur de la résistance à 0°C

- Thermistance:  $R = R_0 \times \exp \left[ \beta \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$

Où  $R_0$  est la valeur de la résistance à  $T_0$ . Les températures sont exprimées en K.

3.

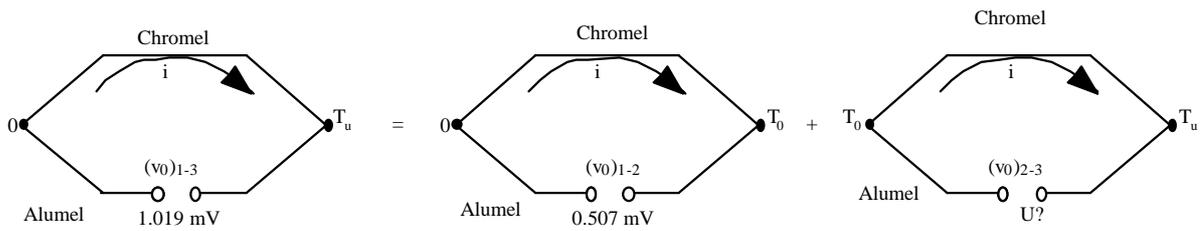


Figure C.5.3. Calcul de la tension aux bornes du thermocouple

La tension délivrée par le voltmètre est  $U = 1.019 - 0.507 = 0.512 \text{ mV}$

4. La valeur affichée par le voltmètre est en fait  $0.652 \text{ mV}$ . Ce résultat est différent à celui qu'on devrait trouver. Ceci peut être dû aux erreurs :
- d'auto-chauffage « self-heating » (Effet Peltier)
  - Effet Thompson
  - Caractéristiques intrinsèques de l'instrument
  - Mauvaise valeur de la température de référence (erreur de lecture, etc.)
  - Conditions opératoires, etc..

5. Le voltmètre branché au thermocouple mesurant  $T_a$  affiche une tension de  $6.112 \text{ mV}$ , Un thermocouple dont les jonctions entre  $T_a$  et  $0^\circ\text{C}$  donnerait comme f.e.m:  $0.507 + 0.6115 = 6.190 \text{ mV}$ . En consultant le tableau du thermocouple nous avons :

$116^\circ\text{C} \rightarrow 6.140 \text{ mV}$

$117^\circ\text{C} \rightarrow 6.195 \text{ mV}$

En faisant une interpolation linéaire, nous obtenons :

$$T = \frac{6,190 - 6,140}{6,195 - 6,140} \times (117 - 116) + 116 = 116,90\text{C}$$

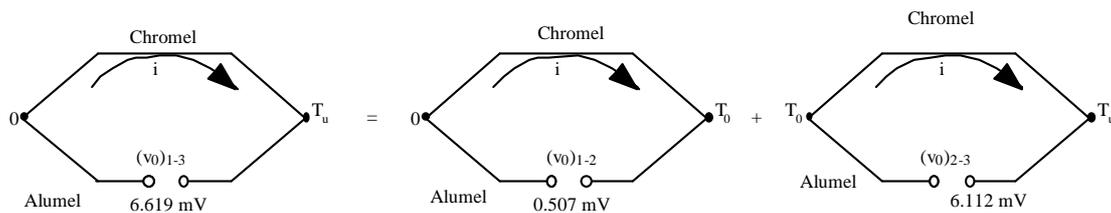


Figure C.5.4. Règle d'utilisation d'un thermocouple

▪ **EXERCICE 14**

1. Voir exercice 13
2. Voir exercice 13
3. A partir de la règle F, (Chapitre 4) nous pouvons écrire :

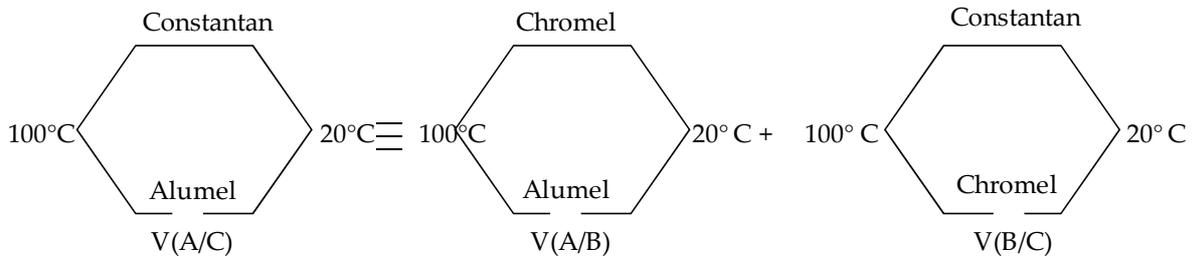


Figure C.5.5. Règle d'utilisation d'un thermocouple

Ce qui nous donne :  $V_{0Alumel / Const} = V_{0Alumel / Chrom} + V_{0Chrom / Const}$

$$V_{0Alumel / Const} = V_{0Chrom / Const} - V_{0Chrom / Alumel}$$

Or, d'après la règle E du même chapitre on a :

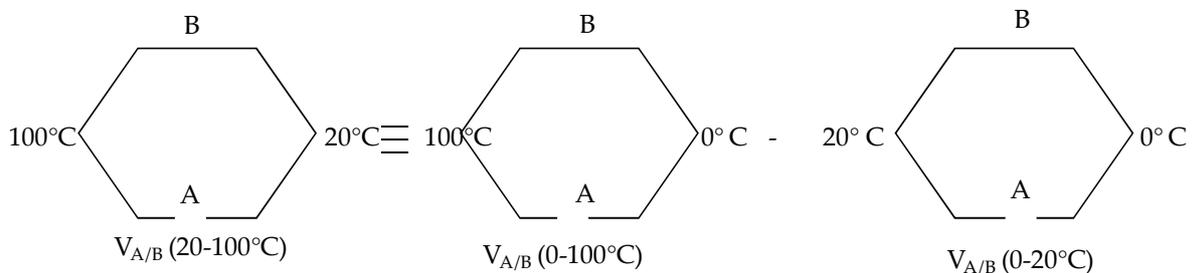


Figure C.5.6. Règle d'utilisation d'un thermocouple

D'après le tableau des thermocouples on a:

$$V_{chromel/Alumel} (20^{\circ}\text{C}-100^{\circ}\text{C}) = 4.095-0.798 = 3.297 \text{ mV}$$

$$V_{chromel/Constantan} (20^{\circ}\text{C}-100^{\circ}\text{C}) = 6.312-1.192 = 5.12 \text{ mV}$$

D'où :

$$V_{Alumel/Constantan} (20^{\circ}\text{C}-100^{\circ}\text{C}) = 5.12-3.297 = 1.823\text{mV}.$$

4. Cette différence est due aux erreurs de mesure

## 6 ● QUESTIONS DE REVISION

---

### ▪ EXERCICE 1

1.

m: mètre pour la Longueur L

kg: kilogramme pour la masse M

s: seconde pour le Temps T

A: Ampère pour l'intensité I

2. Le principe de fonctionnement d'un transducteur : il converti la mesurande en une variation d'un signal électrique. Exemple : l'effet photoélectrique.

3. Les erreurs aléatoires sont d'origine non consistante et ne peuvent pas être déterminées. Elles sont non constantes et ne peuvent être qu'estimées à partir des méthodes statistiques.

Par ailleurs, les erreurs systématiques sont d'origine consistante et provoquent un écart constant entre la valeur mesurée et la vraie valeur de la mesure. Elles peuvent être éliminées par un bon étalonnage du capteur.

Exemple : Erreur d'interpolation (erreur systématique) ; Bruit magnétique (erreur aléatoire)

4. Médiane : C'est la valeur qui partage la population des mesures en deux parties de taille égale.

### ✱ EXERCISE 2

1. The figure resuming the principle components of an electronic instrument is the following:

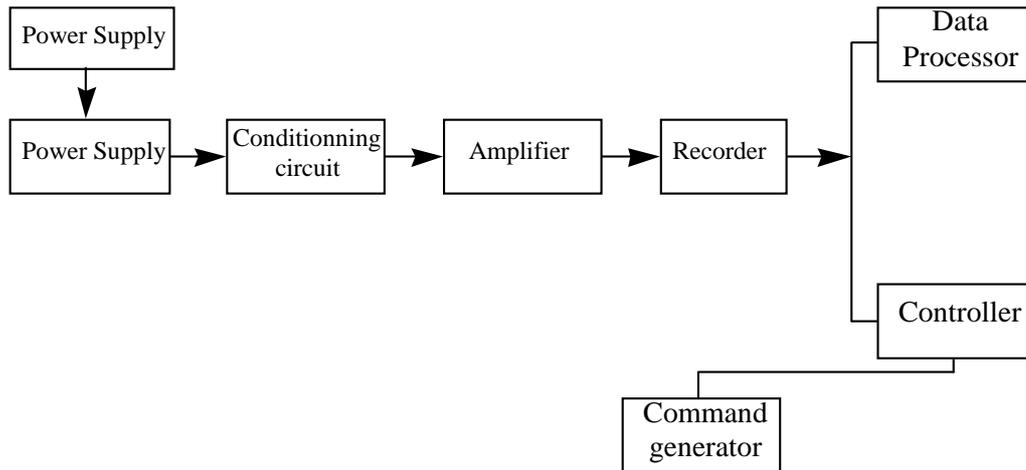


Figure C.6.1. Les différents composants d'un instrument de mesure électronique

2. The difference between an RTS and a Thermistor is that thermistor is semiconductors while RTS are simple resistance. The relationship between temperature and resistance is given by :

- *RTS* :  $R = R_0 (1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots + \gamma_n T^n)$

- *Thermistance* :  $R = R_0 \times \exp \left[ \beta \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$

3. The difference between static and dynamic characteristics of an instrument: Static characteristics concern the study of a sensor when the input is constant; however dynamic characteristic concerns the characterization of the sensor when the input exhibits a variation (step variation, sinwave, linear, etc.)

**Examples.**

Static characteristics (Precision, accuracy, zero drift),

Dynamic characteristics (Time constant, hysteresis, etc. )

4. For the first order system, the relations ship between the input and the output can be given by the following relation:

$$a \frac{d\theta_0}{dt} + b \theta_0 = c \theta_i$$

▪ **EXERCISE 4**

- Aging of the transducer: **Systematic**
- Sensitivity error: **Systematic**
- Reading Errors: **Random**
- Zero-drift of a measuring device: **Systematic**
- Magnetic Noise around the measuring device : **Random**

▪ **EXERCICE 5**

1. Le circuit de conditionnement sont des circuits électriques qui convertissent, compensent et manipulent le signal de sortie d'un transducteur en un signal électrique plus utile.

Exemple : Pont de Wheatstone qui converti une variation de résistance électrique en une variation de tension.

2. On peut assimiler la distribution de l'ensemble des résultats à une loi de Gauss si les résultats ne présentent que des erreurs aléatoires (pas d'erreurs systématiques)

3. En supposant que la relation entre x et y est de la forme  $y = mx+b$ , l'erreur globale est donnée par :  $\Delta^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2$

Il s'agit d'une fonction convexe dépendant des deux paramètres m et b.

Cette fonction atteins son minimal quad son gradient est nul, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta^2}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta^2}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) \times x_i \right] = 0 \\ -2 \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) \times 1 \right] = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système avec les inconnus m et b donne les équations (6.1) et (6.2)

## 7 ● PROBLEMES DE SYNTHESE

---

### ■ PROBLEME 3

1. The input signal  $m$  is the light flux  $F$  and the output signal  $S$  is the voltage  $V$

2.  $i = i_C + i_R$ , where  $q = C.V \rightarrow i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$  and  $i_R = \frac{V}{R_m}$

So we obtain:

$$i = C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R_m} = C.V_1.j.\omega.e^{j(\omega t + \phi)} = \left( C.V_1.j.\omega + \frac{V_1}{R_m} \right).e^{j\phi}.e^{j.\omega.t} = I_1.e^{j.\omega.t}$$

Finally, we deduce:  $I_1 = \left( C.V_1.j.\omega + \frac{V_1}{R_m} \right).e^{j\phi}$

3. The differential equation is:

$$A. \frac{dS}{dt} + B.S = m \Leftrightarrow C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R_m}.V = i = I_1.e^{j.\omega.t} = S_d.\Phi_1.e^{j.\omega.t} = S_d.\Phi$$

Where  $A = \frac{C}{S_d}$  and  $B = \frac{1}{R_m S_d}$  So  $f_c = \frac{B}{2\pi A} = \frac{1}{2\pi RC}$

4.  $I_1 = S_d \Phi_1 = \left( C.j.\omega + \frac{1}{R_m} \right).V_1.e^{j\phi}$

By applying the module we obtain:

$$S_d \Phi_1 = V_1 \cdot \sqrt{(\omega C)^2 + \frac{1}{R_m^2}}$$

$$V_1 = \frac{S_d \Phi_1 R_m}{\sqrt{(\omega R_m C)^2 + 1}}$$

where:  $\omega = 2.\pi.f$  and  $R_m C = \frac{1}{2.\pi.f_c} \rightarrow \omega R_m C = \frac{f}{f_c} \rightarrow V_1 = \frac{S_d \Phi_1 R_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$

By applying the argument we obtain:

$$\text{Arg}(S_d \Phi_1) = \text{Arg} \left[ \left( C.j.\omega + \frac{1}{R_m} \right) . V_1 . e^{j\varphi} \right] = 0, \text{ So } \text{Arg} \left( C.j.\omega + \frac{1}{R_m} \right) = -\varphi$$

$$\text{tg}(-\varphi) = \frac{\omega C}{1/R_m} = \omega C R_m = \frac{2.\pi.f}{2.\pi.f_c} = \frac{f}{f_c} = -\text{tg}\varphi \Rightarrow \varphi = -\text{Arctg} \left( \frac{f}{f_c} \right)$$

$$5. S(f) = \frac{V}{\Phi} = \frac{V_1 . e^{j(\omega t + \varphi)}}{\Phi_1 . e^{j\omega t}} = \frac{V_1}{\Phi_1} . e^{j\varphi}$$

By applying the module:

$$S(f) = \frac{R_m S_d}{\sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}}$$

The Time constant is given by:  $\tau = \frac{1}{2.\pi.f_c} = R_m . C$

#### ▪ PROBLEME 4

##### Part 1: Level Measurement

$$L = \frac{\text{Ln} \frac{d_2}{d_1} \times C}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_1}$$

1.1. The input is the level L and the output is the capacitance

$$1.2. S = \frac{\Delta C}{\Delta L} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_1}{\text{Ln} \frac{d_2}{d_1}}$$

2.3. The sensor is linear because the output C varies linearly versus the input L (the sensitivity is constant)

2.4. The curve C= f(L) is as follows:

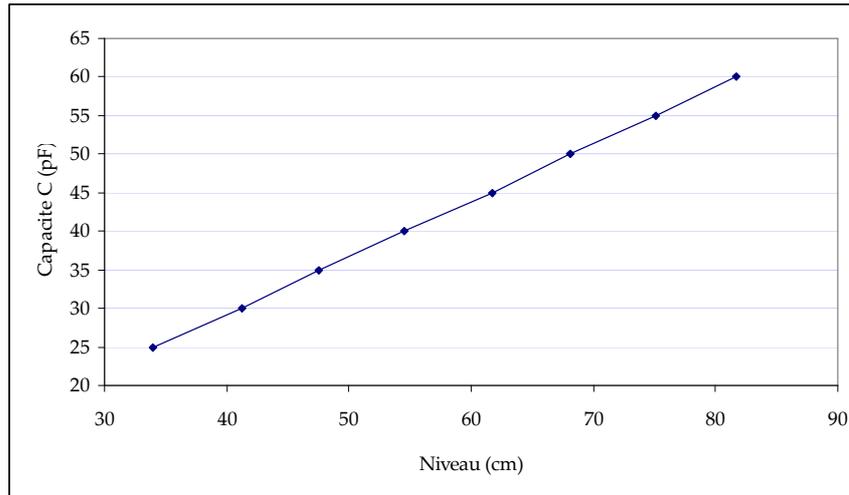


Figure C.7.1. Variation of the capacitance versus the liquid level

1.5. By using the regression analysis we obtain:  $m = 7 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$

$$\epsilon_1 = \frac{\text{Ln} \frac{d_2}{d_1} \times m}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 1,15 \text{ AV}^{-1}$$

$$1.6. L = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \text{Ln} \frac{d_2}{d_1} \times C$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \epsilon_1} d\epsilon_1 + \frac{\partial L}{\partial d_1} dd_1 + \frac{\partial L}{\partial d_2} dd_2 + \frac{\partial L}{\partial C} dC$$

$$\Delta L = \frac{C}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left[ \text{Ln} \frac{d_2}{d_1} \left( \frac{\Delta\epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{\Delta C_1}{C} \right) + \frac{\Delta d_1}{d_1} + \frac{\Delta d_2}{d_2} \right] = 0,09 \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

## Part 2 : Temperature Measurement

2.1. The platinum is the most used material in RTS manufacturing because it gives a stable and linear variation of the electrical resistance versus the temperature

2.2.  $R(T) = 200 \Omega$ , the temperature measured by the RTS :

$$T = \frac{R - R_0}{\gamma R_0} + 25 = \frac{200 - 100}{0,4 \times 100} + 25 = 27,5^\circ \text{C}$$

Self heating phenomenon: When WB is used and the current flow inside wires

Joule effect produced and the RTS is heated. It is a systematic error

$$P_T = R_T i^2 = \frac{V_s^2}{4R_T} = \frac{1^2}{4R_T} = \frac{1^2}{4 \times 200} = \frac{1}{800} = 1,25 \text{ mW}$$

$$\Delta T_{\text{sh}} = F_{\text{sh}} \times \Delta T = 0,5 \times 1,25 = 0,625^\circ\text{C}$$

So the corrected temperature is:

$$T_{\text{cor}} = 27,5 - 0,625 = 26,875^\circ\text{C}$$

2.3. The resolution of the RTS at  $50^\circ\text{C}$  is given by:

$$\Delta T = \frac{\Delta R}{R_0 \gamma} = \frac{0,5}{100 \times 0,4} = 0,0125^\circ\text{C}$$

2.4. The situation can be presented as following :

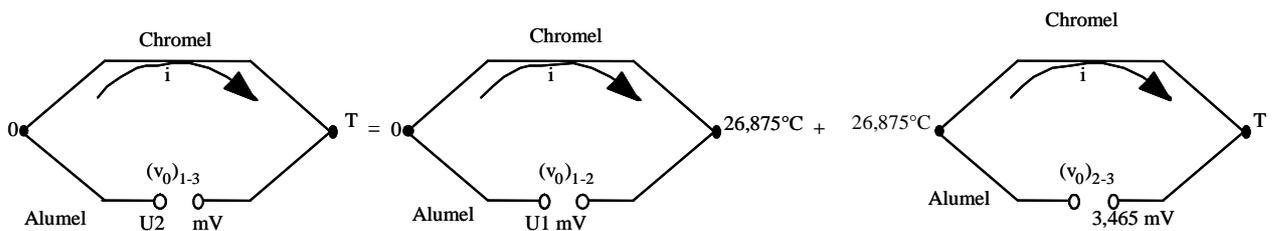


Figure C.7.2. Thermocouple Voltage calculation

We have :  $U_2 = U_1 + 3,465 \text{ mV}$

$U_1$  corresponds to the voltage indicated by a Chromel Alumel thermocouple with the reference Junction at  $0^\circ\text{C}$  and the other at  $26,875^\circ\text{C}$ . This voltage is determined by linear interpolation from the table :

$26^\circ\text{C} \rightarrow 1,041 \text{ mV}$

$27^\circ\text{C} \rightarrow 1,081 \text{ mV}$

So, for  $26,875^\circ\text{C}$ , we have :  $1,076 \text{ mV}$

$\rightarrow U_2 = 1,076 + 3,465 = 4,541 \text{ mV}$

According to the table we have:

$4,508 \text{ mV} \rightarrow 110^\circ\text{C}$

$4,549 \text{ mV} \rightarrow 111^\circ\text{C}$

By linear interpolation we obtain finally:  $T = 110,8^\circ\text{C}$

▪ **PROBLEM 6 : FLOW MEASUREMENT**

- To establish, on the attached graduated paper, the graph  $Q = f(\sqrt{p_1 - p_2})$ , we have to convert the parameters in the adequate units :

1 bar =  $10^5$  Pa and  $Q(\text{m}^3/\text{S}) = Q(\text{m}^3/\text{h})/3600$ . So we obtain the following table and curve :

Table C.7.1. Data conversion

$p_1 - p_2$ (Pa)	$\sqrt{p_1 - p_2}$	Q (m <sup>3</sup> /s)
13000	114,0175	2,21E-01
19000	137,8405	2,67E-01
25000	158,1139	3,07E-01
29000	170,2939	3,30E-01
45000	212,1320	4,12E-01
51000	225,8318	4,38E-01
60000	244,9490	4,75E-01
62000	248,9980	4,83E-01

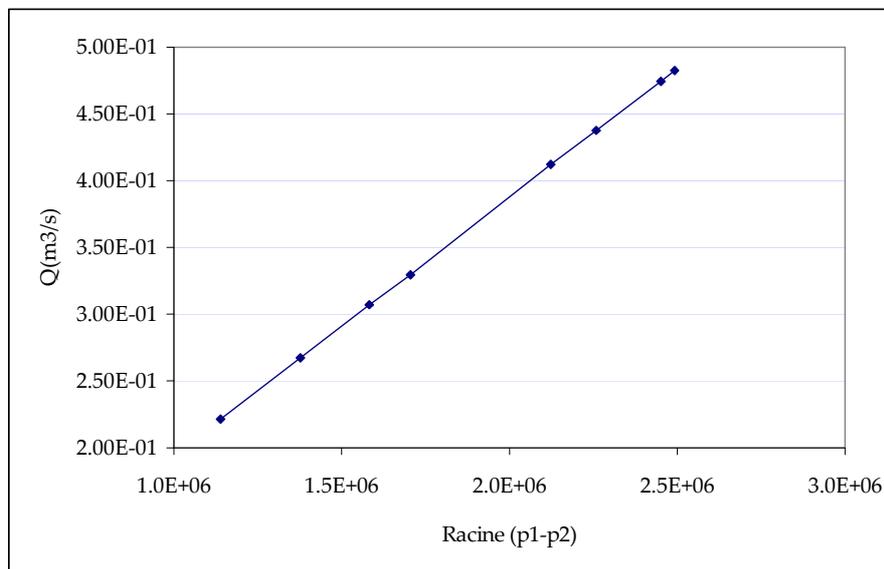


Figure C.7.3. Variation of the mass flow versus pressure

We remark that we obtain a linear curve.

2.

Demonstration:

Note  $\Delta$  the total error done by this approximation with :

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2$$

Where  $y_i$  is the coordinate obtained by the equation ( $y_i = mx_i + b$ ) and  $Y_i$  is the experimental coordinate.

The best Line is that minimize the total error  $\Delta \rightarrow$  Or minimizing  $\Delta$  is equivalent to Min ( $\Delta^2$ ) (the square in an increasing function)  $\rightarrow$  the obtained function is convex so we should find  $m$  and  $b$  that give partial derivatives (according to  $m$  and  $b$ ) equal to Zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta^2}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

This gives us :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta^2}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \right] = 0 \end{cases}$$

After derivation we obtain :

$$\begin{cases} -2 \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) \times x_i \right] = 0 \\ -2 \left[ \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) \times 1 \right] = 0 \end{cases}$$

The resolution of the system gives the equations 1 and 2.

3. We define the correlation coefficient parameter  $\rho^2$  such as

$$[y^2] = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \quad \text{et} \quad [xy] = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}$$

It expresses if there is a linear correlation between  $Y$  and  $x$ .

4. If we apply the regression analysis we obtain :

$$m = 0.0019 \quad \text{and} \quad b = 0, \quad \rho^2 = 1$$

That means that the relation  $Q = f(\sqrt{p_1 - p_2})$  is linear and we verify that:

$$\frac{Q}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho}} = 0,0019 \text{ USI}$$

$$5. Q = m \times \sqrt{P_1 - P_2} \rightarrow dQ = \frac{dQ}{dP_1} dP_1 + \frac{dQ}{dP_2} dP_2 = \frac{m}{2\sqrt{P_1 - P_2}} (dP_1 - dP_2)$$

$$\Delta Q = \frac{m}{2\sqrt{P_1 - P_2}} (\Delta P_1 + \Delta P_2)$$

We obtain  $\Delta Q = 0,037 \text{ m}^3/\text{s}$  so  $\Delta Q/Q = 16,7\% \rightarrow$  This measurement is not precise

6. a. the resolution of a measurement system is the smallest variation that can be detected by an instrument at a certain value

$$b. \Delta Q = \frac{m}{2\sqrt{P_1 - P_2}} (\Delta P_1 + \Delta P_2) = 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

▪ **PROBLEM 8 : Temperature regulation by a BIMETALLIC STRIP**

$$1. \Delta l = \alpha l_0 (T - T_0)$$

$$2. \Delta l_1 = \alpha_1 l_0 (T - T_0) = 17.3 \cdot 10^{-6} \times 22 \times (120 - 10) = 0,042 \text{ cm}$$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 l_0 (T - T_0) = 1.1 \cdot 10^{-6} \times 22 \times (120 - 10) = 0,0027 \text{ cm}$$

3. Two metallic strips are welded. When this bimetallic strip submits a variation in temperature, both strips exhibit a length variation inducing to a curvature of the instrument.

4. Applying one of the following variable changes:

✓ First one:  $X = 1/\Delta T$  the equation becomes:  $\rho = K X$ . The corresponding table is the following :

Table C.7.2. Variable change

$1/(T-T_0) (^{\circ}C^{-1})$	-0,10	-0,10	-0,10	-0,10	-0,10	-0,10
$\rho (m)$	0,95	0,49	0,35	0,23	0,18	0,15

By applying the regression analysis we obtain:

$$K = m = 4,79 \text{ and } \rho^2 = 0,99$$

✓ The second one can be:

$\ln \rho = \ln K - \ln \Delta T \rightarrow Y = \ln \rho$  et  $X = \ln \Delta T$ , the corresponding table is

Table C.7.3. Variable change

<b>Ln<math>\rho</math></b>	-0,05	-0,71	-1,05	-1,47	-1,71	-1,90
<b>Ln<math>\Delta T</math></b>	1,61	2,30	2,71	3,00	3,22	3,40

By applying the regression analysis we obtain :

$$b = \ln K = 1,6 \text{ and } \rho^2 = 0,99 \text{ So } K = \exp(1,6) = 4,79$$

5. the sensitivity of a sensor is the ratio between the variation of the output by the variation of the input :

$$S = \frac{\Delta \text{Output}}{\Delta \text{Input}}$$

The value of sensitivity at  $T_1$  is obtained as following :

$$\rho = \frac{K}{(T - T_0)}, \text{ so, } \frac{d\rho}{dT} = -\frac{K}{(T - T_0)^2}, \text{ then } \frac{\Delta\rho}{\Delta T} = \frac{K}{(T - T_0)^2} = \frac{4,99}{(120 - 10)^2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}/^{\circ}C$$

6. The resolution of the bimetallic strip at this temperature is determined by :

$$\Delta T = \Delta\rho \frac{(T - T_0)^2}{K} = 10^{-3} \frac{(120 - 10)^2}{4,99} = 2,42^{\circ}C$$

7.

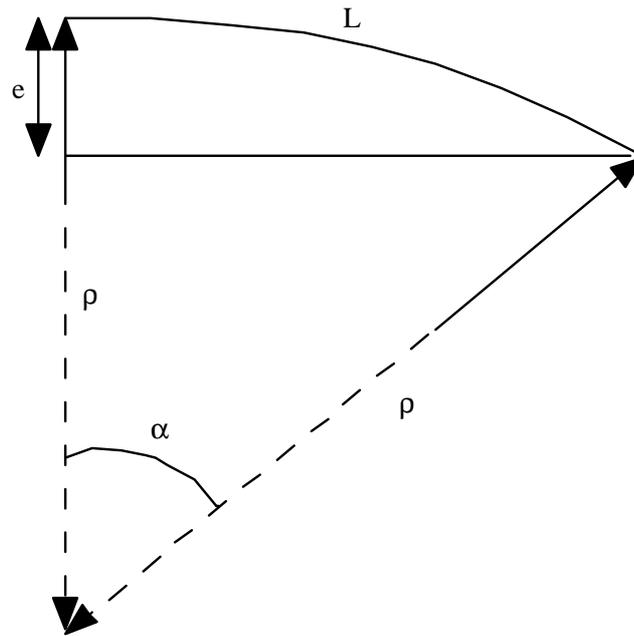


Figure C.7.4. Curve radius calculation

$$L(T) = \rho(T) \times \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{L(T)}{\rho(T)} \text{ in radian}$$

$$\cos \alpha = \frac{\rho(T) - e}{\rho(T)} \Rightarrow e = \rho(T) (1 - \cos \alpha) = \rho(T) \left( 1 - \cos \frac{L(T)}{\rho(T)} \right)$$

$$L(120^\circ\text{C}) = (L_1 + L_2)/2 = (22,042 + 22,0027)/2 = 22,022 \text{ cm}$$

$$\rho(120^\circ\text{C}) = 4,99/110 = 0,045 \text{ m} = 4,54 \text{ cm}$$

$$\text{So } e(120^\circ\text{C}) = 0,045 (1 - \cos (22,02/4,54)) = 0,045 (1 - \cos (4,85)) = 0,039 \text{ m} = 3,9 \text{ cm}$$

$$8. \quad e = \rho \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) \right)$$

$$de = \frac{\partial e}{\partial L} dL + \frac{\partial e}{\partial \rho} d\rho$$

$$de = \rho \left( \frac{1}{\rho} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) dL + \left[ \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) - \rho \left( \frac{L}{\rho^2} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) \right] d\rho$$

$$de = \left( \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) dL + \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) - \frac{L}{\rho} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) d\rho$$

$$\Delta e = \left( \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) \Delta L + \left( 1 - \cos \left( \frac{L}{\rho} \right) - \frac{L}{\rho} \sin \left( \frac{L}{\rho} \right) \right) \Delta \rho$$

$$\Delta e = 0,037 \text{ cm}$$

✱ **PROBLEM 9 : TEMPERATURE MEASUREMENT**

**Part 1: Study of the temperature sensor**

1.1. The reference junction temperature is at 17,3°C. So we will suppose that we have the following configuration:

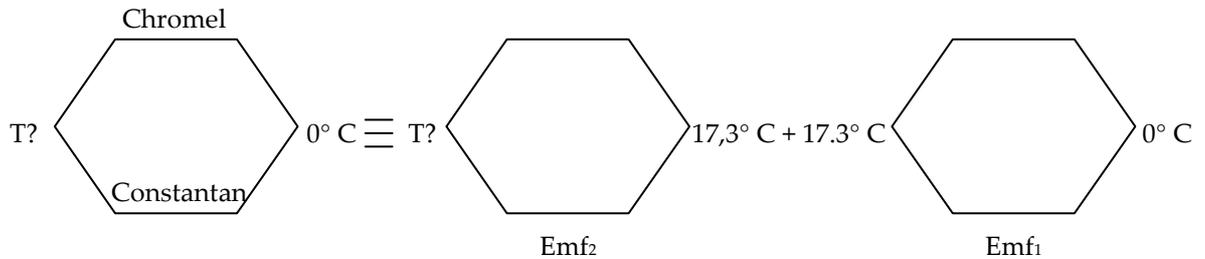


Figure C.7.4. Thermocouple calculations

$$\text{Emf}_2 = 0.163 \text{ mV}$$

$\text{Emf}_1$  is determined from the table related to the (chromel/Constantan) thermocouple by linear interpolation:

$$\frac{\text{Emf}_1 - 1,011}{1,071 - 1,011} = \frac{T - 17}{18 - 17} \Rightarrow \text{Emf}_1 = 1,029 \text{ mV}$$

$$\text{So } \text{Emf} = 1,029 + 0,163 = 1,192 \text{ mV}$$

According to the thermocouple table, we deduce  $T = 20^\circ\text{C}$

$$1.2. \bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^6 T_i}{6} = 30,61^\circ\text{C}$$

The standard deviation is determined by :

$$s_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (T_i - \bar{T})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (T_i - \bar{T})^2}{5}} = 0,32^\circ\text{C}$$

The uncertainty is deduced from the standard error from the mean:

$$S_T = \frac{s_T}{\sqrt{n}} = \frac{0,32}{\sqrt{6}} = 0,13^\circ\text{C}$$

So:

$$T = 30,61 \pm 0,13^{\circ}\text{C}$$

1.3. The errors that have to be considered in this experiment are the following:

- Illegitimate errors
- Systematic errors: error of the reference value (bad accuracy of mercury in glass thermometer), error of the characteristic of the transducer and correction and interpolation error.
- Random errors: errors of reading of the RJT by the mercury in glass thermometer.

## Part 2: Statistical analysis

2.1. For the thermistor, we have:

$$R = R_{01} e^{\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} \rightarrow T = \frac{1}{\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{R}{R_{01}}\right) + \frac{1}{T_0}}$$

Where T and T<sub>0</sub> are in K

For the RTD

$$R = R_{02} (1 + \alpha T) \rightarrow T = \frac{R - R_{02}}{\alpha R_{02}}$$

Where T is in °C

Applying the formula to the experimental results, we obtain the following table

Table C.7.4. Temperature calculation

t (min)	R <sub>1</sub> (Ω)	R <sub>2</sub> (Ω)	T <sub>in.v</sub> (°C)	T <sub>out.v</sub> (°C)
0	200	235	134,55	114,00
30	210	238	131,66	111,50
60	220	236	128,98	109,50
90	215	241	130,31	110,00
120	205	232	133,10	113,00
150	214	231	130,58	110,50
180	220	238	128,98	109,59

$$\bar{T}_{\text{inv}} = \frac{\sum_{i=1}^7 T_{\text{in.v.i}}}{7} = 131,17^{\circ}\text{C} \quad \text{and} \quad \bar{T}_{\text{out}} = \frac{\sum_{i=1}^7 T_{\text{out.v.i}}}{7} = 111,14^{\circ}\text{C}$$

2.2. The Error:

2.3. The resolution:

For the thermistor :  $\ln \frac{R}{R_{01}} = \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \rightarrow \frac{dR}{R} = -\beta \frac{dT}{T^2}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \beta \frac{\Delta T}{T^2} \rightarrow \Delta T = \frac{T^2}{\beta} \frac{\Delta R}{R}$$

At 110 °C, we have :  $R = 310,68 \Omega$  so  $\Delta T = 0,034^\circ\text{C}$

For the RTD, we have  $R = R_{02} (1 + \alpha T)$

$$\Delta T = \frac{\Delta R}{\alpha R_{02}}$$

At 110 °C, we have:  $R = 140 \Omega$  so  $\Delta T = 0,347^\circ\text{C}$

2.4. We remark that the resolution of the thermocouple at this temperature is inferior to that of the thermistor. So we can conclude that the thermocouple is more adequate at this temperature.

## ✱ PROBLEM 10

### Part 1

1.1. The expression of the Thermistance Resistance as a function of temperature is:

$$R = R_0 \times \exp \left[ \beta \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

1.2. Hence the value of temperatures are given as following

$$T = \frac{1}{\left[ \frac{1}{\beta} \ln \frac{R}{R_0} + \frac{1}{T_0} \right]}$$

Which gives :

For  $R = 1000 \Omega \rightarrow T = 84.544^\circ\text{C}$

For  $R = 980 \Omega \rightarrow T = 85.407^\circ\text{C}$

1. For the corresponding errors, after derivation we have:

$$\Delta T = \frac{T^2}{\beta} \frac{\Delta R}{R}$$

This gives:

Correction des exercices-Chapitre 7: Problèmes de synthèses

For  $R=1000 \Omega \rightarrow \Delta T = 0.085^\circ\text{C}$

For  $R = 980 \Omega \rightarrow \Delta T = 0.065^\circ\text{C}$

Hence  $T_{\text{top}} = (84.544 \pm 0.085)^\circ\text{C}$  and  $T_{\text{bottom}} = (85.407 \pm 0.065)^\circ\text{C}$

2. The average temperature of the film  $T_f$

$$T_f = \frac{T_{\text{top}} + T_{\text{bottom}}}{2} = \frac{84.544 + 85.407}{2} = 84.97^\circ\text{C} \approx 85^\circ\text{C}$$

1. Using the Chromel-Alumel table, the temperatures corresponding to the different thermocouples are determined:

$\theta^\circ$	Voltage [mV]	T in $^\circ\text{C}$
0	3.681	90
30	3.734	91.29
60	3.764	92
90	2.845	93
120	3.847	94
150	3.905	95.40
180	3.93	96

For the angle  $90^\circ$ , the following rule is used:

$$V(T-0^\circ\text{C}) = V(T-24^\circ\text{C}) + V(24^\circ\text{C}-0^\circ\text{C}) = 2.845 + 0.96 = 3.805 \text{ mV} \rightarrow T = 93^\circ\text{C}$$

2. The values are illustrated in the following table:

$\theta^\circ$	$h_\theta$ ( $\text{W}/\text{m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ )
0.00	1818.18
30.00	1446.28
60.00	1298.70
90.00	1136.36
120.00	1010.10
150.00	873.73
180.00	826.45

$$3. \quad h_\theta = q \times \frac{R_{\text{int}}}{R_{\text{ext}}} \times \frac{1}{(T_\theta - T_f)}$$

$$\text{Ln}h_{\theta} = \text{Ln}q - \text{Ln} (T_{\theta} - T_f)$$

$$\frac{dh_{\theta}}{h_{\theta}} = \frac{dq}{q} - \frac{dT_{\theta}}{T_{\theta} - T_f}$$

$$\frac{dh_{\theta}}{h_{\theta}} = \frac{dq}{q} - \frac{dT_{\theta}}{T_{\theta}} \frac{T_{\theta}}{T_{\theta} - T_f}$$

Hence:

$$\frac{\Delta h_{\theta}}{h_{\theta}} = \frac{\Delta q}{q} + \frac{T_{\theta}}{T_{\theta} - T_f} \times \frac{\Delta T_{\theta}}{T_{\theta}}$$

For  $\theta = 90^{\circ}$ , we obtain:

$$\frac{\Delta h_{\theta}}{h_{\theta}} = 0.001 + \frac{93}{93 - 85} \times 0.001 = 0.0126 = 1.26\%$$

On the other hand, for  $\theta = 90^{\circ}$ ,  $h_{\theta} = 1136.36 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C}$  So  
 $\Delta h_{\theta} = 14.3 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C}$ .

4. We have:

$$h_{\theta} = A \times e^{B \cdot \theta}$$

By applying the following variable change we obtain:

$$\text{Ln}h_{\theta} = \text{Ln}A + B \cdot \theta$$

After a variable change and by using the least squares method, we find the following results:

$$\text{Ln} A = 7.4447, B = -0.00043 \text{ and } \rho^2 = 0.9812$$

$\rho^2 \sim 1$  so the assumption is good

$$A = 1710.8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C}$$

$$B = -0.00043 \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$$

## ✱ PROBLEM 11

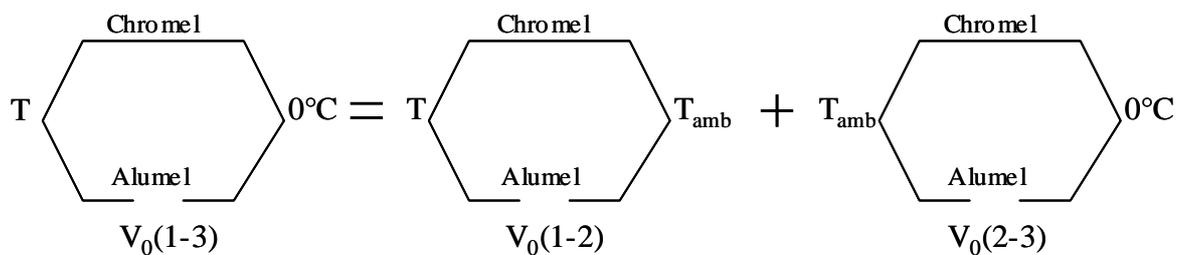
### Part I

1. The input signal of the transducer is the layer thickness and the output signal is the Voltage

2. Using the linear regression method (least square), we obtain the following data:  
 $m = 12,559$ ;  $b = 0,0004$  and  $\rho^2 = 0,9993 \sim 1$  (With a relation:  $y = mx+b$ )  
 from this data we see first that:  $\rho^2 \sim 1$ , So the linear relation can be maintained.  
 Moreover,  $b = 0,0004 \sim 0$  which is very small compared to the measured value.  
 So  $b$  can be neglected. Finally we can say that:  $U = Kx$
3. With  $K = m = 12,559$  V/m
4.  $K$  is the sensitivity of the sensor
5. The sensor can be classified as linear (Zero order system)
6.  $x = \frac{U}{K} = \frac{3,76}{12,559} = 0,299 : 0,3mm$

**Part II**

1. The operating principle of a thermocouple can be explained by the Seebeck Effect
2. a. Reduce the number of combinations between  $T_1$  and  $T_2$  (standardisation).  
 All the tables are done in these conditions  
 b. The Error is not critical if we know the value of the ambient temperature  
 c. We can correct it by using this rule:



**3. For the thermocouple 1:**

The value  $V_1 = 2.9965$  mV does not exist in the table, so we should use a linear interpolation:

$2,976$  mV  $\rightarrow$   $73^\circ\text{C}$

$3,017$  mV  $\rightarrow$   $74^\circ\text{C}$

$2,9965$ mV  $\rightarrow$   $T$

with  $\frac{T - 73}{74 - 73} = \frac{2,9965 - 2,976}{3,017 - 2,976} \rightarrow T = 73,5^\circ\text{C}$

Conclusion  $T_f = 73,5^\circ\text{C}$

**For the Thermocouple 2:**

We check first the value given at  $19^\circ\text{C}$ , which is  $V_0(2-3) = 0,758 \text{ mV}$

Hence the corresponding voltage at this temperature when the cold junction is at  $0^\circ\text{C}$  is  $U_2 = 2,259 + 0,758 = 3,017 \text{ mV}$

Basing on the thermocouple Table, we obtain:  $T_c = 74^\circ\text{C}$

4. The overall heat transfer coefficient  $U$ , is given by:

$$U = \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)} = \frac{10000}{10 \times (74 - 73,5)} = 2000 \text{ W / m}^2\text{C}$$

5.

$$U = \frac{1}{\left[ \frac{1}{h_0} + (R_0 + x) \left[ \frac{1}{R_i h_i} + \left( \frac{1}{k_w} + \frac{1}{k_s} \right) \times \text{Ln} \left( \frac{R_0}{R_i} \right) \right] \right]} \quad (7.14)$$

So

$$x = \frac{\frac{1}{U} - \frac{1}{h_0}}{\left[ \frac{1}{R_i h_i} + \left( \frac{1}{k_w} + \frac{1}{k_s} \right) \times \text{Ln} \left( \frac{R_0}{R_i} \right) \right]} - R_0$$

After calculation, we obtain :  $x = 0,297 \text{ mm} \sim 0,3 \text{ mm}$

7. From the direct measurement, we have:  $x_1 = 0,299 \text{ mm}$

From the indirect measurement, we have  $x_2 = 0,297 \text{ mm}$

The results obtained from both experiments are very close

$$8. U = \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q} dQ + \frac{\partial U}{\partial T_c} dT_c + \frac{\partial U}{\partial T_f} dT_f$$

$$dU = \frac{1}{A \times (T_c - T_f)} dQ - \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)^2} dT_c + \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)^2} dT_f$$

$$\Delta U = \frac{1}{A \times (T_c - T_f)} \Delta Q + \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)^2} \Delta T_c + \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)^2} \Delta T_f$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{A \times (T_c - T_f)}{Q} \left[ \frac{1}{A \times (T_c - T_f)} \Delta Q + \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)^2} \Delta T_c + \frac{Q}{A \times (T_c - T_f)^2} \Delta T_f \right]$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{1}{(T_c - T_f)} \Delta T_c + \frac{1}{(T_c - T_f)} \Delta T_f$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{T_c}{(T_c - T_f)} \frac{\Delta T_c}{T_c} + \frac{T_f}{(T_c - T_f)} \frac{\Delta T_f}{T_f}$$

$$9. \frac{\Delta U}{U} = 0,01 + \frac{74}{(74 - 73,5)} 5 \times 10^{-4} + \frac{73,5}{(74 - 73,5)} 5 \times 10^{-4} = 0,1575 = 15,75\%$$

This error is high so we cannot rely on the indirect measurement

10. If we neglect the other errors in the equation (7.14) we can write is as:

$$U = \frac{1}{(R_0 + x) \times C}$$

Where C is a constant

$$\ln U = -\ln(R_0 + x) - \ln C$$

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{R_0 + x} dx$$

So

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta x}{(R_0 + x)}$$

## **ANNEXES**

---

## A ● ANNEXES 1:

---

Table of Thermoelectric Voltages for Chromel-Alumel Thermocouples with the reference Junction at 0°C (Thermocouple type K)

°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.000	0.039	0.079	0.119	0.158	0.198	0.238	0.277	0.317	0.357	0.397
10	0.397	0.437	0.477	0.517	0.557	0.597	0.637	0.677	0.718	0.758	0.798
20	0.798	0.838	0.879	0.919	0.960	1.000	1.041	1.081	1.122	1.163	1.203
30	1.203	1.244	1.285	1.326	1.366	1.407	1.448	1.489	1.530	1.571	1.612
40	1.612	1.653	1.694	1.735	1.776	1.817	1.858	1.899	1.941	1.982	2.023
50	2.023	2.064	2.106	2.147	2.188	2.230	2.271	2.312	2.354	2.395	2.436
60	2.436	2.478	2.519	2.561	2.602	2.644	2.685	2.727	2.768	2.810	2.851
70	2.851	2.893	2.934	2.976	3.017	3.059	3.100	3.142	3.184	3.225	3.267
80	3.267	3.308	3.350	3.391	3.433	3.474	3.516	3.557	3.599	3.640	3.682
90	3.682	3.723	3.765	3.806	3.848	3.889	3.931	3.972	4.013	4.055	4.096
100	4.096	4.138	4.179	4.220	4.262	4.303	4.344	4.385	4.427	4.468	4.509

Table of Thermoelectric Voltages for Chromel-Constantan Thermocouples with the reference  
Junction at 0°C

Annexes 1 : Table of thermocouples

- 
- 1
  - 2
  - 3
  - 4
  - 5
  - 6